Analiza B

Paweł Głowacki

1. INDUKCJA MATEMATYCZNA I NIERÓWNOŚCI

Pojęcie[1] *liczby rzeczywistej* uważać będziemy za intuicyjnie oczywiste. Tym niemniej celowe wydaje się przypomnienie i ugruntowanie niektórych fundamentalnych własności liczb rzeczywistych.

W zbiorze liczb rzeczywistych, który będziemy oznaczać przez $\mathbb{R}$, na szczególną uwagę zasługują *liczby wymierne*, czyli liczby postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$. Będziemy używać oznaczeń $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ odpowiednio na zbiory liczb naturalnych, całkowitych i wymiernych.

Geometrycznie wyobrażamy sobie liczby rzeczywiste jako oś liczbową, której punktem początkowym jest 0. Dlatego $\mathbb{R}$ często nazywamy prostą rzeczywistą.

Z algebraicznego punktu widzenia $\mathbb{R}$ stanowi *ciało*, bo określone są w nim dwa działania

$$(x, y) \to x + y, \quad (x, y) \to x \cdot y,$$

zwane odpowiednio dodawaniem i mnożeniem, o następujących własnościach. Dodawanie jest łączne i przemienne, a elementem neutralnym jest liczba 0. Ponadto, każdy element $x \in \mathbb{R}$ posiada element przeciwny. Mnożenie jest łączne i przemienne, a elementem neutralnym jest jedność. Różne od zera elementy $\mathbb{R}$ posiadają element odwrotny. Wreszcie mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Łatwo zauważyć, że wszystkie powyższe własności posiadają także liczby wymierne. Zatem i $\mathbb{Q}$ jest ciałem. Nie są natomiast ciałami ani $\mathbb{Z}$, ani $\mathbb{N}$.

Zbiór liczb rzeczywistych jest liniowo uporządkowany. Oznacza to, że istnieje w nim relacja porządku $\leq$, taka że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ jest $x \leq y$ lub $y \leq x$.

Zbiór liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym, czyli równolicznym ze zbiorem liczb naturalnych. Ponadto jest gęstym podzbiorem $\mathbb{R}$. Rozumiemy przez to, że dla dla każdych rzeczywistych $x < y$, istnieje liczba wymierna w, taka że

$$x < w < y.$$

Innymi słowy, każdy otwarty przedział prostej rzeczywistej zawiera przynajmniej jedną liczbę wymierną. Oczywiście stąd natychmiast wynika, że jest ich w istocie w każdym przedziale nieskończenie wiele.

Ciało liczb rzeczywistych posiada istotną własność, której nie ma ciało liczb wymiernych. Otóż wśród liczb ograniczających dany niepusty zbiór $E \subset \mathbb{R}$ od góry

[1] Serdecznie dziękuję Pani Agnieszce Kazun za trud włożony w przepisanie i redakcję znacznej części niniejszego skryptu

(o ile takie istnieją) jest zawsze liczba najmniejsza. Nazywa się ją kresem górnym zbioru E, a wypowiedzianą własność – własnością kresu lub *aksjomatem ciągłości*. Będziemy o tym mówić bardziej szczegółowo w rozdziale 2.

Przystępujemy obecnie do właściwego wykładu. Najpierw omówimy zasadę indukcji matematycznej. Indukcja matematyczna jest metodą dowodzenia własności liczb naturalnych.

Definicja. Niech $T(n)$ orzeka pewną własność liczby naturalnej n. Zasada **indukcji matematycznej** mówi, że jeśli

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad T(n_0),$$

oraz

$$\forall n \geq n_0: \quad T(n) \Rightarrow T(n+1),$$

to prawdziwe jest twierdzenie

$$\forall n \geq n_0: \quad T(n).$$

Tak więc dowód indukcyjny przebiega w dwóch etapach. Pierwszy polega na sprawdzeniu warunku początkowego, drugi nazwiemy krokiem indukcyjnym. Zilustrujmy teraz zasadę indukcji matematycznej.

1.1. **Twierdzenie** (nierówność Bernoulliego)**.** *Dla każdego $n \geq 1$ i każdego $x \geq -1$ zachodzi nierówność*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

D o w ó d. (i) Sprawdzamy warunek początkowy dla $n_0 = 1$:

$$(1+x) \geq 1 + x.$$

(ii) Załóżmy, że nierówność $(1+x)^n \geq 1 + nx$ jest prawdziwa dla pewnego $n \geq 1$. Chcemy pokazać, że wtedy prawdziwa jest również nierówność

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

Istotnie, mnożąc obie strony $T(n)$ przez nieujemne wyrażenie $(1+x)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

Tym samym dowód został zakończony. $\square$

Średnią arytmetyczną liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nazywamy wyrażenie

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n};$$

średnią geometryczną liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \geq 0$ nazywamy wyrażenie

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n};$$

średnią harmoniczną liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n > 0$ nazywamy wyrażenie

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Umówmy się, że przez

$$A = A(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad G = G(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad H = H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

bedziemy oznaczać odpowiednio średnią arytmetyczna, geometryczną i harmoniczną liczb $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Następujący lemat wykorzystamy w dowodzie kolejnego twierdzenia.

1.2**. Lemat.** *Niech będą dane liczby* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ *takie, że* $a_1 < A < a_n$, *gdzie* $A = A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *Wtedy*

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) < G(A, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, (a_1 + a_n - A)).$$

D o w ó d . Trzeba udowodnić nierówność

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} < (A a_2 a_3 \ldots a_{n-1}(a_1 + a_n - A))^{\frac{1}{n}}.$$

Podnosząc obie strony do potęgi n, a następnie dzieląc je przez dodatnią liczbę $a_2 a_3 \ldots a_{n-1}$, otrzymujemy nierówność równoważną

$$a_1 a_n < A(a_1 + a_n - A),$$

więc wystarczy pokazać, że

$$A^2 - A(a_1 + a_n) + a_1 a_n < 0.$$

W tym celu rozważmy funkcję kwadratową

$$f(x) = x^2 - x(a_1 + a_n) + a_1 a_n.$$

Wyróżnik równania $f(x) = 0$ wynosi

$$\Delta = (a_1 + a_n)^2 - 4a_1 a_n = (a_1 - a_n)^2,$$

zatem

$$\sqrt{\Delta} = |a_1 - a_n| = a_n - a_1,$$

bo $a_1 < a_n$, a stąd dostajemy, że pierwiastkami funkcji f są liczby a_1 i a_n. Ponieważ wykresem funkcji f jest parabola skierowana ramionami do góry i $a_1 < A < a_n$, więc $f(A) < 0$, co kończy dowód lematu. □

1.3**. Twierdzenie.** *Jeśli* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \geq 0$, *to średnia arytmetyczna tych liczb jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, czyli*

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n},$$

przy czym równość zachodzi, wtedy i tylko wtedy gdy

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n.$$

D o w ó d . Jeśli $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$, to oczywiście zachodzi równość średnich arymetycznej i geometrycznej tych liczb. Trzeba zatem pokazać, że jeśli co najmniej dwie spośród wszystkich liczb a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, są różne, to zachodzi ostra nierówność

$$G(a_1, \ldots, a_n) < A(a_1, \ldots, a_n).$$

Zauważmy, że jeśli $a_k = 0$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to średnia geometryczna jest równa zero i oczywiście jest wtedy istotnie mniejsza od średniej arytmetycznej tych liczb. Wówczas bowiem średnia arytmetyczna jest dodatnia, gdyż nie wszystkie wyrazy a_k mogą być zerami. Przyjmijmy więc, że wszystkie liczby a_k są dadatnie. Dowodzimy naszej nierówności przez indukcję ze względu na n.

(i) Warunek początkowy. Jeśli $a, b > 0$ są różne, to $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$ więc

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0,$$

skąd

$$a + b > 2\sqrt{a}\sqrt{b},$$

czyli

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

(ii) Krok indukcyjny. Załóżmy, że nasza teza jest prawdziwa dla każdych $n \geq 2$ liczb dodatnich. Chcemy wywnioskować jej prawdziwość dla dowolnych $n+1$ liczb dodatnich, czyli wzór

$$(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{n+1}(a_1 + a_2 + \ldots a_{n+1})$$

dla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} > 0$, gdzie przynajmniej dwie z nich są różne. Niech A oznacza średnią arytmetyczną liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Zmieniając ewentualnie numerację, możemy przyjąć, że $a_1 < A < a_{n+1}$. Zdefiniujmy nowy ciąg $n+1$ liczb w następujący sposób:

$$b_k = \begin{cases} A & \text{dla } k = 1; \\ a_k & \text{dla } 1 < k \leq n; \\ a_1 + a_{n+1} - A & \text{dla } k = n. \end{cases}$$

Oczywiście wtedy

$$A(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) = A$$

oraz na mocy Lematu 1.2

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) < G(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}).$$

Wystarczy więc pokazać, że $G(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) \leq A$. Mamy

$$A = A(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) = \frac{1}{n+1}(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1})$$
$$= \frac{1}{n+1}(A + b_2 + \ldots + b_{n+1}),$$

czyli

$$\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)A = \frac{1}{n+1}(b_2 + \ldots + b_{n+1}),$$

a stąd (po pomnożeniu obu stron przez $\frac{n+1}{n}$)

$$A = \frac{1}{n}(b_2 + \ldots + b_{n+1}).$$

Korzystając z założenia indukcyjnego, dostajemy, że

$$A > (b_2 b_3 \ldots b_{n+1})^{\frac{1}{n}},$$

skąd

$$A^{n+1} = b_1 A^n > b_1 b_2 \dots b_{n+1},$$

czyli

$$A > G(b_1, b_2, \dots, b_{n+1}).$$

Tym samym dowód został zakończony. $\square$

1.4. **Twierdzenie** (nierówność Bernoulliego). *Dla liczby wymiernej $\alpha \geq 1$ i dowolnego $x \geq -1$ zachodzi następująca nierówność*

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Dowód. Ponieważ dla $\alpha = 1$ nierówność jest oczywiście spełniona, załóżmy, że $\alpha = \frac{p}{q}$, gdzie $p > q$ oraz $p, q \in \mathbb{N}$. Nasza nierówność przyjmuje zatem postać

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} \geq 1 + \frac{p}{q}x.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $1 + \frac{p}{q}x \geq 0$, bo w przeciwnym wypadku nierówność nie wymaga uzasadnienia. Podnosząc obie strony do potęgi $\frac{q}{p}$, dostajemy nierówność

$$(1+x) \geq \left[\left(1 + \frac{p}{q}x\right)^q\right]^{\frac{1}{p}}$$

i jej wystarczy dowieść. Rozpatrzmy ciąg p dodatnich liczb, z których q jest równych $1 + \frac{p}{q}x$, a pozostałe $p - q$ to jedynki. Średnia arytmetyczna tych liczb wynosi

$$\frac{q \cdot (1 + \frac{p}{q}x) + (p-q) \cdot 1}{p} = \frac{q + px + p - q}{p} = \frac{p(x+1)}{p} = x + 1,$$

a ich średnia geometryczna

$$\left[\left(1 + \frac{p}{q}x\right)^q 1^{p-q}\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\left(1 + \frac{p}{q}x\right)^q\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Oznacza to, że nasza nierówność sprowadza się do nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną tych p liczb, co kończy dowód. $\square$

1.5. **Wniosek.** *Niech liczby $\alpha < 1 < \beta$ będą wymierne. Wówczas dla dowolnych $x, y > 0$ zachodzą nierówności*

$$(1+x)^\alpha < 1 + x^\alpha, \qquad (1+y)^\beta > 1 + y^\beta.$$

Dowód. Podstawiając $y = x^\alpha$ i $\beta = 1/\alpha$, łatwo się przekonujemy, że nierówności te są równoważne. Wystarczy zatem dowieść tylko drugiej z nich.

Przyjmijmy najpierw, że $\beta y \geq y^\beta$. Wtedy na mocy nierówności Bernoulliego

$$(1+y)^\beta > 1 + \beta y \geq 1 + y^\beta,$$

tak jak chcieliśmy.

Jeśli natomiast $\beta y \le y^\beta$, to $y^{\beta-1} \ge \beta$ i stosując ponownie nierówność Bernoulliego widzimy, że

$$\begin{aligned}(1+y)^\beta &= y^\beta(1+1/y)^\beta > y^\beta(1+\beta/y)\\ &= y^\beta + \beta y^{\beta-1} \ge \beta^2 + y^\beta > 1 + y^\beta,\end{aligned}$$

więc i w tym wypadku wszystko się zgadza. $\square$

Dodajmy, że założenie o wymierności wykładnika w nierówności Bernoulliego jest nieistotne. Przekonamy się o tym w rozdziale 3.

Symbolem Newtona nazywamy wyrażenie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.6. **Twierdzenie** (wzór dwumienny Newtona). *Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dowód. Możemy bez straty ogólności założyć, że $b \ne 0$. Dzieląc wzór Newtona obustronnie przez b^n i oznaczając $x = \frac{a}{b}$, otrzymujemy

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

i tego wzoru będziemy dowodzić.

Sprawdzenie warunku początkowego dla $n = 1$ nie nastręcza żadnych trudności. Aby wykonać krok indukcyjny, założmy, że wzór obowiązuje dla pewnego $n \ge 1$. Wtedy

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n = (1+x)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1}\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k,\end{aligned}$$

bo

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Tym samym zakończyliśmy dowód. $\square$

Zauważmy mimochodem, że wzór ten pozwala łatwo uzasadnić nierówność Bernoulliego o wykładniku naturalnym dla liczb nieujemnych, a mianowicie

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 1 + nx,$$

gdyż dla $x \geq 0$ oczywiście $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 0$.

Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ określamy jej **moduł** (lub **wartość bezwzględną**) wzorem

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0; \\ -x & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

lub równoważnie

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Funkcja wartości bezwzględnej spełnia warunek trójkąta

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

przy czym równość zachodzi, wtedy i tylko wtedy gdy $xy \geq 0$. Stąd natychmiast wynika nierówność

$$\Big| |x| - |y| \Big| \leq |x-y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Moduł liczby x można interpretować jako jej odległość od zera na osi liczbowej, zaś $|x-y|$ jako odległość x od y. Pamiętając, że środek odcinka $[x, y]$ to punkt $\frac{x+y}{2}$, możemy wyrazić większą z liczb x, y wzorem

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x+y|}{2},$$

a mniejszą

$$\min\{x, y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|x+y|}{2}.$$

Częścią całkowitą liczby rzeczywistej x nazywamy największą liczbę całkowitą n taką, że $n \leq x$ i oznaczamy ją przez $[x]$.

Definicję tę można zapisać również w taki sposób:

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leq x\}.$$

Zauważmy, że jeśli $x \in [n, n+1)$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, to $[x] = n$; w szczególności, jeśli $x \in \mathbb{Z}$, to $[x] = x$. Zauważmy również, że każdą liczbę rzeczywistą x można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$x = [x] + \mathbf{m}(x),$$

gdzie $\mathbf{m}(x) \in [0, 1)$.

Niech $x \in \mathbb{R}$. Liczbę $\mathbf{m}(x) = x - [x]$ nazywamy **mantysą** liczby x.

Aby oswoić Czytelnika z pojęciem części całkowitej liczby, udowodnimy następującą tożsamość:

$$[nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right], \qquad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy najpierw, że jeśli $m \in \mathbb{Z}$, to

$$[n(x+m)] = [nx + nm] = [nx] + nm$$

oraz

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + m + \frac{k}{n}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left[x + \frac{k}{n}\right] + m\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] + nm,$$

więc po zastąpieniu x przez $x+m$ tożsamość zostanie zachowana. Wystarczy zatem udowodnić ją dla $0 \leq x < 1$.

Niech więc $0 \leq x < 1$ i niech $l = [nx]$. Wtedy $0 \leq l \leq n-1$ i

$$\frac{l}{n} \leq x < \frac{l+1}{n},$$

a wobec tego

$$\left[x + \frac{k}{n}\right] = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } 0 \leq k < n-l; \\ 1 & \text{jeżeli } n-l \leq k \leq n. \end{cases}$$

Zatem

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = \sum_{k=n-l}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = l = [nx],$$

tak jak zapowiedzieliśmy.

2. Nieskończone ciągi liczbowe

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Wartości tej funkcji oznaczamy przez $a(n) = a_n$ i nazywamy **wyrazami ciągu**. Często ciąg oznaczamy przez $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub po prostu przez $\{a_n\}$.

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy **ograniczonym od góry**, jeśli

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M,$$

a **ograniczonym od dołu**, jeśli

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq m.$$

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się **ograniczony**, jeśli jest ograniczony od góry i od dołu, tzn.

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq K.$$

2.1**. Przykład.** Pokażemy, że ciąg $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest ograniczony od góry. Istotnie, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned}
e_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n-k+1}{n}\right) \qquad (2.2)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2}^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.
\end{aligned}$$

Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywa się

(i) **rosnący**, jeśli

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n,$$

(ii) **ściśle rosnący**, jeśli

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n,$$

(iii) **malejący**, jeśli

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n,$$

(iv) **ściśle malejący**, jeśli

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n.$$

2.3**. Przykład.** Pokażemy, że ciąg $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$ jest ściśle rosnący, zatem jest ograniczony również od dołu (przez swój pierwszy wyraz). Rzeczywiście, na mocy nierówności Bernoulliego

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]^n \\ &> \left[1+\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\right]^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Mówimy, że liczba g jest **granicą ciągu liczbowego** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jeśli w każdym przedziale otwartym zawierającym g znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (tzn. wszystkie poza, być może, skończoną ilością).

Definicję tę możemy zapisać również tak:

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - g| < \varepsilon.$$

U w a g a. Jeśli w ciągu $\{a_n\}$ zmienimy, usuniemy lub dodamy skończoną ilość wyrazów, to nie będzie to miało żadnego wpływu ani na zbieżność ciągu ani na wartość granicy.

U w a g a. Jeśli $c > 0$ jest pewną stałą, to występujący w definicji warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - g| < \varepsilon$$

jest równoważny następującemu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - g| < c \cdot \varepsilon.$$

Z tego powodu mówi się czasem o „elastyczności epsilona".

2.5**. Przykład.** Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Istotnie, dla ustalonego $\varepsilon > 0$ nierówność $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $n > \frac{1}{\varepsilon}$, tzn.

$$\forall \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Jako wskaźnik N występujący w definicji można więc przyjąć

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

2.6. **Przykład.** Pokażemy z definicji, że

$$b_n = \frac{3n+4}{15n-1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{5}.$$

Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Chcemy pokazać, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$\left|b_n - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon.$$

Ponieważ

$$\left|\frac{3n+4}{15n-1} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{21}{5(15n-1)}\right| = \frac{21}{5(15n-1)},$$

więc

$$\left|b_n - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 21 < 5(15n-1)\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{21+5\varepsilon}{75\varepsilon},$$

zatem pokazaliśmy, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \left[\frac{21+5\varepsilon}{75\varepsilon}\right] + 1 \quad \forall n \geq N \quad \left|b_n - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon.$$

2.7. **Przykład.** Pokażemy, że ciąg stały o wyrazach $a_n = c$ ma granicę równą c. Rzeczywiście, jeśli ustalimy dowolnie $\varepsilon > 0$, to nierówność

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

jest spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2.8. **Przykład.** Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0,$$

gdyż $|a_n - 0| = \big||a_n| - 0\big|$.

Wprost z definicji wynika następujący wniosek.

2.9. **Wniosek.** *Jeżeli $a_n \to a$ i $b_n \to b$ oraz $a_n \leq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $a \leq b$.*

Nieco dalej idzie ważne twierdzenie o trzech ciągach.

2.10. **Twierdzenie** (o trzech ciągach). *Jeśli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy $g \in \mathbb{R}$, a ciąg $\{x_n\}$ ma własność*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq x_n \leq b_n,$$

to $\{x_n\}$ jest również zbieżny do g.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim a_n = g$, więc istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$, takie że jeśli $n \geq N_1$, to $|a_n - g| < \varepsilon$, czyli $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$. Podobnie dla ciągu $\{b_n\}$ istnieje $N_2 \in \mathbb{N}$, takie że $g - \varepsilon < b_n < g + \varepsilon$ dla $n \geq N_2$. Wtedy dla każdego $n \geq N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ mamy

$$g - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < g + \varepsilon,$$

czyli

$$|x_n - g| < \varepsilon,$$

co oznacza, że ciąg $\{x_n\}$ również zbiega do g. $\square$

U w a g a. Oczywiście w twierdzeniu tym wystarczy założyć, że nierówność

$$a_n \leq x_n \leq b_n$$

zachodzi dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, gdyż (jak zauważyliśmy wcześniej) skończona ilość wyrazów ciągu nie ma wpływu na istnienie i wartość jego granicy.

2.11. **Wniosek.** *Jeśli* $a_n \to 0$ *oraz* $0 \leq b_n \leq a_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to również* $b_n \to 0$.

2.12. **Twierdzenie.** *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

D o w ó d . Weźmy dowolny ciąg zbieżny

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathbb{R}.$$

Wtedy istnieje liczba $N \in \mathbb{N}$, taka że jeśli $n \geq N$, to $|a_n - a| < 1$. Ponieważ

$$\big||a_n| - |a|\big| < |a_n - a|,$$

więc

$$\forall n \geq N \quad |a_n| < |a| + 1,$$

zatem

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < \max\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{N-1}|\},$$

czyli $\{a_n\}$ jest ograniczony. $\square$

Zauważmy, że implikacja w drugą stronę oczywiście nie jest prawdziwa. Jako przykład rozważmy ciąg o wyrazach $a_n = (-1)^n$. Jest on ograniczony, bo $|a_n| \leq 1$, ale nie jest zbieżny. Przypuśćmy bowiem, że $a_n \to g$, gdy $n \to \infty$, dla pewnego $g \in \mathbb{R}$. Wtedy istniałaby taka liczba $N \in \mathbb{N}$, że $|a_n - g| < 1$ dla $n \geq N$. Dla takich n mielibyśmy więc

$$|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2$$

i jednocześnie

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - g + g - a_n| \leq |a_{n+1} - g| + |g - a_n| < 2,$$

co nie jest możliwe.

Mówimy, że ciąg jest **rozbieżny**, jeśli nie ma granicy liczbowej. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest **rozbieżny do nieskończoności** (**ma granicę niewłaściwą równą** ∞) i piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, jeśli

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n > M.$$

Mówimy, że $\{a_n\}$ jest **rozbieżny do $-\infty$** (**ma granicę niewłaściwą równą $-\infty$**) i piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, jeśli

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n < -M.$$

2.13. **Przykład.** Ciąg o wyrazach $a_n = n$ jest rozbieżny do ∞. Istotnie, dla dowolnej liczby $M > 0$, nierówność $a_n > M$ zachodzi dla wszystkich $n \geq [M] + 1$.

2.14. **Przykład.** Ustawiając „metodą tablicową" wszystkie liczby wymierne w ciąg nieskończony, otrzymamy przykład ciągu, który nie jest ograniczony, zatem nie jest też zbieżny. Ciąg ten nie ma nawet granicy niewłaściwej.

2.15. **Fakt.** *Niech będą dane dwa ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ oraz dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq b_n$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

2.16. **Przykład.** Ponieważ $2^n \geq n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

2.17. **Fakt.** *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczbowym. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty.$$

Przykładami ciągów rozbieżnych do $-\infty$ są więc

$$\{-n\}_{n\in\mathbb{N}}, \ \{-2^n\}_{n\in\mathbb{N}}, \ \{-n\cdot 2^n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

2.18. **Fakt.** *Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|$.

2.19. **Twierdzenie** (arytmetyczne własności granic). *Niech $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ będą ciągami liczbowymi. Niech ponadto $\alpha \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha a$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = ab$.

Jeśli ponadto $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Dowód. (a) – (c). Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

oraz
$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \Rightarrow \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_2 \quad |b_n - b| < \varepsilon.$$
Zatem nierówność
$$|\alpha a_n - \alpha a| = |\alpha| \cdot |a_n - a| < |\alpha|\varepsilon$$
jest spełniona dla każdego $n > N_1$, co pokazuje własność (a). Natomiast nierówność
$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$$
jest spełniona dla każdego $n > \max\{N_1, N_2\}$, co dowodzi własności (b). Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jako zbieżny jest ograniczony, więc
$$\exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < K$$
i dla każdego $n > \max\{N_1, N_2\}$ mamy
$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\le |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &< K \cdot \varepsilon + |b| \cdot \varepsilon = (K + |b|) \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$
co potwierdza własność (c).
(d). Wobec własności (c) wystarczy pokazać, że
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$
Na mocy Faktu 2.18 mamy
$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = |b|,$$
a stąd
$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1 \quad |b_n| > \frac{|b|}{2}.$$
Niech $\varepsilon > 0$. Wobec zbieżności ciągu $\{b_n\}$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_2 \quad |b_n - b| < \varepsilon.$$
Stąd dla każdego $n > \max\{N_1, N_2\}$ mamy
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon.$$
Tym samym dowód został zakończony. $\square$

Przez indukcję łatwo wyprowadzamy następujący wniosek.

2.20. **Wniosek.** *Niech będą dane zbieżne ciągi* $\{a_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$, *gdzie* $1 \le k \le N$. *Wtedy*
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_n^{(k)} = \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} a_n^{(k)}$$
oraz
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{N} a_n^{(k)} = \prod_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} a_n^{(k)}.$$

2.21. Przykład. Rozważmy ciąg geometryczny $\{q^n\}$, gdzie $q > 0$. Z nierówności Bernoulliego dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$q^n = \big(1 + (q-1)\big)^n \geq 1 + n(q-1) > (q-1) \cdot n.$$

(1) Załóżmy, że $q > 1$. Wtedy $q^n > c_q \cdot n$, gdzie $c_q = q - 1 > 0$ i wobec tego

$$q > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} q^n = \infty,$$

bo $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot n = \infty$ dla $c > 0$.
(2) Załóżmy, że $q \in (0,1)$. Wtedy

$$\frac{1}{q} > 1 \quad \Rightarrow \quad \Big(\frac{1}{q}\Big)^n > \Big(\frac{1}{q} - 1\Big)n \quad \Rightarrow \quad q^n < d_q \cdot \frac{1}{n},$$

gdzie $d_q = \frac{q}{1-q}$, i wobec tego

$$q \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

bo $\lim\limits_{n\to\infty} d \cdot \frac{1}{n} = d \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ dla dowolnego $d \in \mathbb{R}$.

Niech będą dane dwa ciągi rozbieżne do nieskończoności. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest **szybciej rozbieżny** niż ciąg $\{b_n\}$ i piszemy $a_n \gg b_n$, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

2.22. Przykład. Rozważmy ciąg geometryczny $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $q > 1$, oraz ciąg potęgowy $\{n^\alpha\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie i $\alpha > 0$. Wiemy już, że obydwa ciągi są rozbieżne do ∞ oraz że zachodzi nierówność $q^n \geq c \cdot n$ dla pewnej dodatniej stałej c. Co więcej,

$$\begin{aligned} q^n &= \Big[\big(1 + (q-1)\big)^{\frac{n}{\beta}}\Big]^\beta \\ &\geq \Big[1 + \frac{n}{\beta}(q-1)\Big]^\beta \\ &> \Big(\frac{q-1}{\beta}\Big)^\beta \cdot n^\beta = c_{q,\beta} \cdot n^\beta \end{aligned}$$

dla wymiernych $0 < \beta \leq n$. Zatem dla $n \geq \beta \geq \alpha + 1$ otrzymujemy

$$\frac{q^n}{n^\alpha} > \frac{c_{q,\beta} \cdot n^\beta}{n^\alpha} \geq c_{q,\beta} \cdot n,$$

a stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = \infty,$$

czyli

$$q^n \gg n^\alpha.$$

2.23. **Przykład.** Porównajmy teraz ciąg geometryczny $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $q > 1$, z również rozbieżnym do ∞ ciągiem $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$. Zobaczymy niedługo, że (patrz Przykład 2.32)

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n. \tag{2.24}$$

Ponieważ dla dostatecznie dużych n mamy $\frac{n}{3} > q^2$, więc dla takich n otrzymujemy

$$n! > (q^2)^n = q^{2n} = q^n \cdot q^n,$$

a stąd

$$\frac{n!}{q^n} > q^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{q^n} = \infty,$$

czyli

$$n! \gg q^n.$$

Pamiętając, że $n! \gg q^n \gg n^\alpha$ (gdzie $q > 1$ i $\alpha > 0$) możemy łatwo znaleźć wartości granic niektórych ciągów, np.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{101}{100})^n}{n^{10^6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(10^{10})^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Policzmy teraz kilka ważnych granic.

2.25. **Fakt.** *Jeśli $a > 0$, to*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

D o w ó d. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $a \geq 1$. Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy ciąg $\{(1+\varepsilon)^n\}_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżnym do ∞ ciągiem geometrycznym, więc

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad (1+\varepsilon)^n > a.$$

Stąd dla każdego $n > N$ mamy

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon.$$

Ponieważ dla $a \geq 1$ również $\sqrt[n]{a} \geq 1$, więc dla $n > N$

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon.$$

Jeśli natomiast $0 < a < 1$, to $\frac{1}{a} > 1$, zatem z powyższego

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}},$$

więc na mocy własności (d) Twierdzenia 2.19 otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. $\square$

2.26. **Fakt.** *Zachodzi następująca równość:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

D o w ó d. Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy $1+\varepsilon > 1$, zatem $(1+\varepsilon)^n \gg n$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0,$$

a stąd

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1.$$

Wtedy dla każdego $n > N$ mamy

$$\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon,$$

czyli

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon,$$

co, wobec dowolności wyboru ε, dowodzi tezy. □

2.27. **Fakt.** *Zachodzi następująca równość:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

D o w ó d. Na mocy nierówności (2.24)

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{n}{3},$$

co wobec rozbieżności do ∞ ciągu $\{\frac{n}{3}\}$ pociąga tezę. □

Wspomnianą na wstępie własność ciągłości zbioru liczb rzeczywistych wygodnie będzie sformułować w jezyku teorii zbieżności ciągów.

Aksjomat ciągłości. *Każdy rosnący i ograniczony z góry ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

Wystarczy zastosować aksjomat ciągłości do ciągu o wyrazach przeciwnych, by otrzymać

Wniosek. *Każdy malejący i ograniczony z dołu ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

Jak pokazaliśmy wcześniej (patrz nierówności (2.2) i (2.4)) ciąg o wyrazach

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest ściśle rosnący i ograniczony, więc, na mocy aksjomatu ciągłości, zbieżny. Wartość jego granicy nazywamy **liczbą e**.

2.28. **Twierdzenie.** *Zachodzi następująca równość:*

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Dowód. Oczywiście ciąg

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

jest ściśle rosnący i, jak wynika z nierówności (2.2), ograniczony, a więc zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez $a \in \mathbb{R}$. Wiemy już także, że

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = a_n,$$

więc na mocy Wniosku 2.9 jest $e \leq a$. Pozostaje dowieść nierówności przeciwnej. W tym celu ustalmy liczbę $m \in \mathbb{N}$. Wtedy dla dowolnego $n > m$

$$\begin{aligned} e \geq e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \\ &> 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) = 1 + x_n. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Zauważmy, że

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{j}{n}\Big) = 1,$$

a stąd na mocy Wniosku 2.20

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}.$$

Przechodząc więc w nierówności (2.29) do granicy, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy

$$e \geq 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = a_m,$$

a stąd, jeszcze raz korzystając z Wniosku 2.9, dostajemy $e \geq a$. $\square$

2.30. **Przykład.** Następująca nierówność określa, jak dokładnie kolejne sumy częściowe a_n przybliżają liczbę e:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}. \tag{2.31}$$

Aby ją uzasadnić, zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}, \end{aligned}$$

o ile $m > n$. Oszacujmy wyrazy tego ciągu. Mamy

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots m} \right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(n+2)^{m-n}}}{1 - \frac{1}{n+2}} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n \cdot n!}. \end{aligned}$$

Ponieważ prawa strona ostatniej słabej nierówności nie zależy od m, więc również

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

2.32. **Przykład.** Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi następująca nierówność:

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{n}{e}.$$

Dla dowodu zauważmy, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n mamy

$$\begin{aligned}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^m &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{m(n+1)} = \sum_{k=0}^{m(n+1)} \binom{m(n+1)}{k}\frac{1}{n^k} \\ &\geq 1 + \binom{m(n+1)}{m}\frac{1}{n^m} \\ &= 1 + \frac{1}{m!}\cdot\prod_{j=0}^{m-1}\frac{m(n+1)-j}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{m!}\cdot\prod_{j=0}^{m-1}\left(m+\frac{m-j}{n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{m!}\prod_{j=0}^{m-1} m = 1 + \frac{1}{m!}\cdot m^m,\end{aligned}$$

a ponieważ prawa strona nie zależy od n, więc możemy przejść do granicy, gdy $n \to \infty$, otrzymując

$$e^m \geq \frac{m^m}{m!} + 1 > \frac{m^m}{m!},$$

skąd

$$m! > \left(\frac{m}{e}\right)^m.$$

2.33. **Przykład.** Pierwiastek z dowolnej liczby naturalnej jest albo liczbą naturalną albo niewymierną. Załóżmy bowiem, że dla dowolnej liczby naturalnej n

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q},$$

gdzie $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz p i q są względnie pierwsze. Podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy równość równoważną

$$n = \left(\frac{p}{q}\right)^2,$$

a stąd

$$nq^2 = p^2.$$

Gdyby liczba q miała jakiś dzielnik pierwszy, to musiałby on dzielić również prawą stronę, czyli liczbę p, a tak być nie może (bo p i q są względnie pierwsze), zatem q nie ma dzielników pierwszych, czyli $q = 1$, co oznacza, że $\sqrt{n} = p \in \mathbb{N}$.

2.34. **Fakt.** *Liczba e jest niewymierna.*

D o w ó d . Załóżmy nie wprost, że $e = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze. Dla $n = q$ nierówność (2.31) przyjmuje wtedy postać

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Mnożąc obie strony przez $q!$, otrzymujemy

$$0 < p\,(q-1)! - q! \cdot \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Aby uzyskać sprzeczność, wystarczy zauważyć, że liczba

$$\alpha = p\,(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in (0,1)$$

jest naturalna. $\square$

2.35**. Przykład.** Niech będzie dana liczba $c > 0$. Zdefiniujmy rekurencyjnie ciąg przybliżeń $\{x_n\}$ kwadratowego pierwiastka z c. Niech mianowicie $x_0 \geq \sqrt{c}$ będzie dowolne i niech

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Zauważmy, że $x_0 \geq \sqrt{c}$ oraz

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{c}{x_n}} = \sqrt{c},$$

więc $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z dołu przez $\sqrt{c}$. Ponadto

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \leq \max\left\{x_n, \frac{c}{x_n}\right\} = x_n,$$

bo $x_n \geq \sqrt{c} \geq c/x_n$. Stąd

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1,$$

czyli $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący, zatem zbieżny do pewnej granicy $x \geq \sqrt{c}$.

Aby obliczyć x, przejdźmy do granicy z $n \to \infty$ we wzorze definiującym ciąg, otrzymując

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right),$$

skąd

$$x = \frac{c}{x},$$

a ponieważ $x > 0$, więc

$$x = \sqrt{c}.$$

Obliczmy dla ilustracji przybliżenia $\sqrt{2}$, jakie można otrzymać tym sposobem. Przyjmując $x_0 = 2$, widzimy, że

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1.5, \qquad x_2 = \frac{17}{12} \approx 1.4167, \qquad x_3 = \frac{577}{408} \approx 1.4142.$$

Ostatnie przybliżenie jest bardzo dobre, ale i poprzednie jest już niezłe.

2.36. **Przykład.** Rozważmy ciąg o wyrazach

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Ciąg ten oczywiście nie jest monotoniczny. Mimo to wywnioskujemy jego zbieżność z aksjomatu ciągłości. W tym celu przyjrzyjmy się ciągom

$$b_n = a_{2n-1}$$

oraz

$$c_n = a_{2n}.$$

Zauważmy, że

$$b_{n+1} - b_n = a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0$$

oraz

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2}\right) + \left(\frac{1}{2n-1}\right) > 0,$$

gdyż każdy ujęty w nawias składnik sumy jest dodatni. Zatem ciąg $\{b_n\}$, jako malejący i ograniczony od dołu, jest zbieżny (na mocy akjomatu ciągłości). Oznaczmy jego granicę przez $b \in \mathbb{R}$. Podobnie dla ciagu wyrazów parzystych ciągu $\{a_n\}$ mamy

$$c_{n+1} - c_n = a_{2n+2} - a_{2n} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$$

oraz

$$c_n = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(-\frac{1}{2n}\right) < 1$$

(gdyż każdy ujęty w nawias składnik sumy jest ujemny), więc ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny, jako rosnący i ograniczony z góry. Oznaczmy jego granicę przez $c \in \mathbb{R}$. Zauważmy ponadto, że

$$c_n - b_n = -\frac{1}{2n}$$

więc przechodząc do granicy z $n \to \infty$, dostajemy

$$b = c.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy, zatem w każdym przedziale otwartym zawierającym $b = c$ znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$ o numerach parzystych i prawie wszystkie o numerach nieparzystych, czyli tak naprawdę prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, co oznacza, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny. Trochę później zobaczymy, że jego granica jest równa $\log 2$.

2.37. **Przykład.** Rozważmy ciąg zdefiniowany rekurencyjnie w następujący sposób:

$$\begin{aligned} &p_1 = a \in (0,1),\\ &p_{n+1} = p_n\,\alpha + (1-p_n)\beta, \qquad n = 1,2,3,\dots, \end{aligned}$$

gdzie $0 < \alpha < \beta < 1$. Gdyby ciąg $\{p_n\}$ był zbieżny do pewnej granicy p, to przechodząc w ostatniej równości do granicy z $n \to \infty$, otrzymalibyśmy

$$p = p\,\alpha + (1-p)\beta,$$

a stąd

$$p = \frac{\beta}{1+\beta-\alpha}.$$

Pokażemy, że ciąg $\{p_n\}$ rzeczywiście jest zbieżny do granicy p (jej wartość nie zależy od wyboru $p_1 = a$). W tym celu zauważmy najpierw, że ciąg $\{p_n\}$ jest ograniczony, gdyż

$$p_1 = a \in (0,1)$$

oraz

$$p_n \in (0,1) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n\,\alpha + (1-p_n)\beta > 0\\ p_{n+1} = \alpha + (1-p_n)(\beta-\alpha) < \alpha + (\beta-\alpha) = \beta < 1. \end{cases}$$

Przypuśćmy teraz, że

$$p_{n+1} \ge p_{n-1}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= p_{n+1}\,\alpha + (1-p_{n+1})\beta = (\alpha-\beta)\,p_{n+1} + \beta\\ &\le (\alpha-\beta)\,p_{n-1} + \beta = p_n \end{aligned}$$

Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $p_3 \ge p_1$. Wtedy z powyższego wynika, że $\{p_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ jest rosnący oraz $\{p_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ jest malejący. Analogicznie, jeśli $p_3 \le p_1$, to podciąg wyrazów nieparzystych jest malejący, a podciąg wyrazów parzystych jest rosnący. Zatem obydwa podciągi, jako ograniczone i monotoniczne, są zawsze zbieżne. Każdy z nich spełnia ponadto tę samą rekurencję:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n\,\alpha + (1-p_n)\beta\\ &= \beta + p_n\,(\alpha-\beta)\\ &= \beta + \Big(p_{n-1}\,\alpha + (1-p_{n-1})\beta\Big)\\ &= \beta\Big(1 + (\alpha-\beta)\Big) + p_{n-1}(\alpha-\beta)^2, \end{aligned}$$

więc przechodząc z $n \to \infty$, otrzymujemy, że granice obu tych podciągów są równe p, takiemu że
$$p = \beta\Big(1 + (\alpha - \beta)\Big) + p\,(\alpha - \beta)^2,$$
a stąd
$$p = \frac{\beta\Big(1 + (\alpha - \beta)\Big)}{1 - (\alpha - \beta)^2} = \frac{\beta}{1 - \alpha + \beta},$$
co mieliśmy pokazać.

Dla dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ przyjmijmy następujące oznaczenie:
$$x_n' = x_{n+1} - x_n.$$

2.38. **Twierdzenie** (Stoltz). *Niech będą dane dwa ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, przy czym ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle rosnący i rozbieżny do ∞. Wtedy zachodzi następująca implikacja:*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n'}{b_n'} = g \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g.$$

D o w ó d. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a_1 = b_1 = 0$ oraz $b_n > 0$ dla $n \geq 2$. Załóżmy też na razie, że $g = 0$. Niech $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje takie $N_1 \in \mathbb{N}$, że
$$\forall n \geq N_1 \qquad |a_n'| \leq b_n'\varepsilon. \tag{2.39}$$
Zauważmy bowiem, że skoro ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle rosnący, to ciąg $\{b_n'\}$ ma wszystkie wyrazy dodatnie. Wtedy
$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| &= \left|\frac{1}{b_{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{b_{n+1}}\sum_{k=1}^{n}|a_k'| = \frac{1}{b_{n+1}}\sum_{k=N_1+1}^{n}|a_k'| + \frac{1}{b_{n+1}}\sum_{k=1}^{N_1}|a_k'| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{b_{n+1}}\sum_{k=N_1+1}^{n} b_k' + \frac{C_{N_1}}{b_{n+1}} \leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$
dla wszystkich $n \geq N_2$, gdzie $\mathbb{N} \ni N_2 > N_1$ jest dobrane tak, aby
$$\forall n > N_2 \qquad b_n \geq \frac{C_{N_1}}{\varepsilon},$$
a
$$C_{N_1} = \sum_{k=1}^{N_1}|a_k'|$$
jest stałą. Istnienie takiego N_2 wynika oczywiście z rozbieżności do ∞ ciągu $\{b_n\}$. Tym samym dowiedliśmy twierdzenia w przypadku, gdy $g = 0$.

Dla dowolnego $g \in \mathbb{R}$ niech

$$\alpha_n = a_n - b_n g.$$

Wtedy, jak łatwo zauważyć $\alpha'_n = a'_n - g b'_n$, więc ciągi $\{\alpha_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają założenia twierdzenia z $g = 0$ i na mocy pierwszej częsci dowodu $\frac{\alpha_n}{b_n} \to 0$, skąd natychmiast

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha_n + g b_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} g.$$

I tak dowód został zakończony. $\square$

2.40. **Przykład.** Dla ciągu zbieżnego ciąg kolejnych średnich arytmetycznych jego początkowych wyrazów jest zbieżny do tej samej granicy, tzn.

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

Jest to bezpośredni wniosek z twierdzenia Stoltza, gdyż dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ zbieżnego do $a \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{(n+1) - n} = a_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} a,$$

więc również

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

2.41. **Przykład.** Policzmy granicę ciągu o wyrazach

$$x_n^{(k)} = \frac{1 + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}},$$

gdzie k jest dowolną acz ustaloną liczbą naturalną. Zauważmy, że dla $k = 1$ mamy

$$x_n^1 = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Stosując twierdzenie Stoltza, pokażemy że

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad x_n^{(k)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k+1}.$$

W tym celu ustalmy dowolnie liczbę $k \in \mathbb{N}$ oraz przyjmijmy oznaczenia:

$$a_n = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

oraz

$$b_n = n^{k+1}.$$

Ciąg $\{b_n\}$ jest oczywiście ściśle rosnący i rozbieżny do ∞. Zauważmy, że

$$\frac{a'_n}{b'_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(1 + \frac{1}{n})^k}{(\frac{n+1}{n})^{k+1} - 1},$$

gdzie

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

oraz

$$\begin{aligned} n\cdot\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1}-1\right] &= n\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-1\right] \\ &= n\cdot\left[\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\frac{1}{n^j}-1\right] \\ &= (k+1)+\sum_{j=2}^{k+1}\binom{k+1}{j}\frac{1}{n^{j-1}} \xrightarrow{n\to\infty} (k+1), \end{aligned}$$

więc

$$\frac{a_n'}{b_n'} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k+1},$$

a stąd, na mocy twierdzenia Stoltza, również

$$x_n^{(k)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k+1}.$$

2.42. **Przykład.** Rozważmy ciąg o wyrazach

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha},$$

gdzie $\mathbb{Q}\ni\alpha\geq 1$. Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Istotnie, jeśli przyjmiemy oznaczenia

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

oraz

$$b_n = n^\alpha,$$

to oczywiście ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle rosnący i rozbieżny do ∞ oraz

$$\begin{aligned} 0<\frac{a_n'}{b_n'} &= \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\alpha-n^\alpha} \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n^\alpha\cdot(1+\frac{1}{n})^\alpha-n^\alpha} \\ &\leq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n^\alpha\cdot(1+\frac{\alpha}{n})-n^\alpha} \\ &< \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}\cdot\alpha}\leq\frac{1}{\alpha n^\alpha}\xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

więc na mocy twierdzenia Stoltza

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Szacując skorzystaliśmy z nierówności Bernoulliego:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \geq 1+\frac{\alpha}{n}.$$

Kresem górnym niepustego zbioru $E \subset \mathbb{R}$ ograniczonego z góry nazywamy najmniejsze spośród jego górnych ograniczeń.

Aby wykazać poprawność tej definicji, pokażemy, że jeśli

$$E^+ = \{y \in \mathbb{R}\colon \quad \forall x \in E \quad x \leq y\} \neq \emptyset,$$

to w E^+ istnieje element najmniejszy. W tym celu dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ przyjmijmy oznaczenie

$$k_n = \min\left\{k \in \mathbb{Z}\colon \ \frac{k}{2^n} \in E^+\right\}.$$

Zauważmy, że wtedy

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad k_{n+1} = 2k_n \quad \text{lub} \quad k_{n+1} = 2k_n - 1\,.$$

Zdefiniujmy teraz ciąg o wyrazach

$$y_n = \frac{k_n}{2^n} \in E^+\,.$$

Mamy

$$y_{n+1} = \frac{2k_n}{2^{n+1}} = \frac{k_n}{2^n} = y_n \qquad \text{lub} \qquad y_{n+1} = \frac{2k_n - 1}{2^{n+1}} = y_n - \frac{1}{2^{n+1}} \leq y_n,$$

co oznacza, że ciąg $\{y_n\}$ jest malejący. Ponieważ jest on również ograniczony z dołu przez elementy zbioru E ($E \neq \emptyset$ z założenia), więc na mocy aksjomatu ciągłości jest zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez $y \in \mathbb{R}$. Zauważmy ponadto, że

$$y_n - \frac{1}{2^n} = \frac{k_n - 1}{2^n} \notin E^+,$$

więc

$$\exists\, x_n \in E \qquad y_n - \frac{1}{2^n} < x_n \leq y_n,$$

a zatem z twierdzenia o trzech ciągach również

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} y.$$

Ponieważ dowolny element zbioru E jest ograniczony przez wszystkie wyrazy ciągu $\{y_n\}$, więc jest również ograniczony przez granicę tego ciągu, co oznacza, że również $y \in E^+$. Pokażemy teraz, że jest to element najmniejszy w tym zbiorze. Przypuśćmy bowiem, że tak nie jest, czyli że istnieje pewien $y' \in E^+$, taki że $y' < y$. Skoro

$$E \ni x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$$

więc w przedziale $(y', y+1)$ są prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{x_n\}$, co przeczy temu, że $y' \in E^+$. Pokazaliśmy więc, że y jest najmniejszym elementem zbioru E^+.

Podsumujmy:

2.43. **Twierdzenie.** *Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór $E \subset \mathbb{R}$ ma kres górny i zawiera rosnący ciąg elementów zbieżny do tego kresu.*

Analogicznie definiujemy kres dolny zbioru ograniczonego z dołu. Czytelnik zechce sam napisać tę definicję i udowodnić następujący

2.44. **Wniosek.** *Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór $E \subset \mathbb{R}$ ma kres dolny i zawiera malejący ciąg elementów zbieżny do tego kresu.*

Kolejnym ważnym pojęciem niniejszego wykładu jest pojęcie punktu skupienia ciągu i ściśle związane z nim pojęcie podciągu.

Niech będzie dany ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Niech ciąg $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ o wyrazach naturalnych będzie ściśle rosnący. Wtedy ciąg o wyrazach

$$b_k = a_{n_k}$$

nazywamy **podciągiem** ciągu $\{a_n\}$.

2.45. **Twierdzenie.** *Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.*

Udowodnienie tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi.

2.46. **Twierdzenie** (Bolzano-Weierstrass). *Każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg zbieżny.*

D o w ó d . Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [a,b]$. Podzielmy przedział $[a,b]$ na pół i wybierzmy tę połowę, gdzie jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$. Oznaczmy ten przedział przez $[a_1,b_1]$. Niech $[a_2,b_2]$ będzie tą połową przedziału $[a_1,b_1]$, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów $\{x_n\}$. Analogicznie konstruujemy zstępujący ciąg przedzialów, takich że

$$|a_n - b_n| = 2^{-n}|a-b|,$$

z których każdy zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$. Zauważmy, że wówczas ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry przez b, więc zbieżny do pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$, a ciąg $\{b_n\}$, jako malejący i ograniczony z dołu przez a, jest zbieżny do pewnego $\beta \in \mathbb{R}$. Ponadto

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

więc

$$\alpha = \beta. \tag{2.47}$$

Wybierzmy teraz podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ciągu $\{x_n\}$ w następujący sposób: Niech $x_{n_1} \in [a_1,b_1]$. Przypuśćmy, że wybraliśmy już

$$x_{n_1} \in [a_1,b_1]\,,\ x_{n_2} \in [a_2,b_2]\,,\ \ldots,\ x_{n_k} \in [a_k,b_k]$$

tak, że

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k.$$

Jako $x_{n_{k+1}}$ wybieramy taki wyraz z przedziału $[a_{k+1},b_{k+1}]$, aby $n_{k+1} > n_k$. Można to zrobić, bo w przedziale znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$.

Skoro

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k \le x_{n_k} \le b_k,$$

więc na mocy (2.47) i twierdzenia o trzech ciągach również

$$x_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha = \beta,$$

co kończy dowód. □

Mówimy, że liczba ξ jest **punktem skupienia ciągu** $\{x_n\}$, gdy ciąg $\{x_n\}$ ma podciąg zbieżny do ξ.

2.48. **Przykład.** Jeśli przez A oznaczymy zbiór punktów skupienia ciągu, to
(a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = c \quad \Rightarrow \quad A = \{c\}$;
(b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = (-1)^n \quad \Rightarrow \quad A = \{-1, 1\}$;
(c) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad A = \{a\}$.

2.49. **Przykład.** Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych odcinka $[0,1]$, a ξ dowolną liczbą z tego odcinka. Wybierzmy teraz podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $\{x_n\}$ tak, aby

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad x_{n_k} \in \Big(\xi - \frac{1}{k}, \xi + \frac{1}{k}\Big).$$

Możemy oczywiście wybrać taki podciąg, gdyż między dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych. Tak wybrany podciąg jest zbieżny do ξ, co oznacza, że zbiorem punktów skupienia ciągu $\{x_n\}$ jest cały odcinek $[0,1]$.

2.50. **Twierdzenie.** *Jeżeli wszystkie podciągi zbieżne ciągu ograniczonego są zbieżne do tej samej granicy, to sam ciąg jest również zbieżny do tej granicy. Równoważnie, jeżeli ciąg ograniczony jest rozbieżny, to ma przynajmniej dwa podciągi zbieżne do różnych granic.*

D o w ó d. Niech $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ będzie ciągiem rozbieżnym. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg

$$x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha.$$

Z rozbieżności ciągu $\{x_n\}$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że poza przedziałem $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów $\{x_n\}$, które oczywiście nadal należą do przedziału $[a,b]$, więc spośród nich również możemy wybrać podciąg zbieżny, tzn.

$$x_{m_k} \xrightarrow{k\to\infty} \beta,$$

gdzie

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad |x_{m_k} - \alpha| \geq \varepsilon,$$

a stąd $|\beta - \alpha| \geq \varepsilon$, więc $\alpha \neq \beta$. □

Kolejne twierdzenie wynika wprost z powyższego.

2.51. **Twierdzenie.** *Ciąg ograniczony jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jego punktów skupienia jest jednoelementowy.*

Okazuje się, że można mówić o zbieżności w oderwaniu od pojęcia granicy. Służy temu pojęcie ciągu Cauchy'ego, które jak zobaczymy za chwilę, jest w istocie równoważne pojęciu ciągu zbieżnego.

Mówimy, że ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest **ciągiem Cauchy'ego** (lub **ciągiem fundamentalnym**), jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n, m \geq N \qquad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.52. **Twierdzenie.** *Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy jest ciągiem Cauchy'ego.*

D o w ó d . ($\Rightarrow$) Weźmy ciąg zbieżny $\{a_n\}$. Niech $\varepsilon > 0$. Ze zbieżności ciągu wynika, że istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że dla dowolnych $n, m \geq N$

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{oraz} \qquad |a_m - a| < \varepsilon,$$

więc

$$|a_n - a_m| < 2\varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Weźmy ciąg Cauchy'ego $\{a_n\}$. Wtedy istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \geq N$

$$|a_n - a_N| < 1\,,$$

czyli

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1.$$

Ponieważ poza tym przedziałem jest tylko skończona liczba wyrazów, więc cały ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony. Zgodnie z twierdzeniem Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $\{a_n\}$ zbieżny do pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Pokażemy, że cały ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do α. W tym celu ustalmy dowolnie liczbą $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\{a_n\}$ jest fundamentalny, więc

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall m, n \geq N \qquad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Natomiast ze zbieżności podciągu $\{a_{n_k}\}$ do liczby α wynika, że

$$\exists K_1 \in \mathbb{N} \qquad \forall\, k \geq K_1 \qquad |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon.$$

Ponieważ $\{n_k\}$ jest rosnący i rozbieżny do ∞, więc

$$\exists\, \mathbb{N} \ni K_2 > K_1 \qquad \forall k \geq K_2 \qquad n_k \geq N.$$

Wtedy dla każdego $k \geq \max\{K_1, K_2\}$ mamy

$$|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

oraz

$$|a_{n_k} - a_n| < \varepsilon,$$

o ile $n > N$, więc dla takich n

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < 2\varepsilon,$$

czyli $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. $\square$

2.53. **Fakt.** *W zbiorze punktów skupienia ciągu ograniczonego istnieje element najmniejszy i największy.*

D o w ó d. Niech będzie dany ciąg $x_n \in [a,b]$. Jest jasne, że zbiór jego punktów skupienia A spełnia warunek $A \subset [a,b]$, więc jest ograniczony. Aby dowieść tezy, pokażemy, że $\beta = \sup A$ jest elementem zbioru A. Analogicznie pokazuje się, że $\alpha = \inf A \in A$.

Niech $a_k \in A$ będzie rosnącym ciągiem zbieżnym do β. Zdefiniujemy indukcyjnie podciąg $\{x_{n_k}\}$ ciągu $\{x_n\}$, taki że

$$a_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a_k + \frac{1}{k}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.54}$$

Niech $a_1 - 1 < x_{n_1} < a_1 + 1$. Przypuśćmy, że zostały już zdefiniowane wyrazy $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots x_{n_k}$, gdzie $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, spełniające powyższe warunki. Ze względu na to, że istnieje nieskończenie wiele n, dla których

$$a_{k+1} - \frac{1}{k+1} < x_n < a_{k+1} + \frac{1}{k+1},$$

znajdzie się wśród nich $n = n_{k+1} > n_k$. Podciąg $\{x_{n_k}\}$ został więc zdefiniowany. Z (2.54) wynika natychmiast, że granicą $\{x_{n_k}\}$ jest β. □

Niech A będzie zbiorem wszystkich punktów skupienia ograniczonego ciągu liczbowego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wtedy **granicą górną** ciągu $\{x_n\}$ nazywamy największy element zbioru A i piszemy

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup A,$$

natomiast **granicą dolną** ciągu $\{x_n\}$ nazywamy najmniejszy element zbioru A i piszemy

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf A.$$

Czytelnik sam może się łatwo przekonać o prawdziwości poniższych faktów:

2.55. **Fakt.** *Dla dowolnego ciągu ograniczonego $\{a_n\}$ zachodzi następująca nierówność:*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

2.56. **Fakt.** *Ciąg ograniczony $\{a_n\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

2.57. **Fakt.** *Liczba α jest granicą dolną ograniczonego ciągu $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \textit{istnieje nieskończenie wiele wyrazów takich, że} \quad a_n < \alpha + \varepsilon$$

oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \textit{istnieje tylko skończenie wiele wyrazów takich, że} \quad a_n < \alpha - \varepsilon.$$

Zauważmy, że pierwszy warunek powyższej koniunkcji równoważny jest temu, że $\liminf a_n \le \alpha$, a drugi nierówności przeciwnej.

2.58. **Fakt.** *Liczba β jest granicą górną ograniczonego ciągu $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \textit{istnieje nieskończenie wiele wyrazów takich, że} \quad a_n > \beta - \varepsilon$$

oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \textit{istnieje tylko skończenie wiele wyrazów takich, że} \quad a_n > \beta + \varepsilon.$$

I tutaj pierwszy warunek koniunkcji równoważny jest nierówności $\limsup a_n \ge \beta$, a drugi nierówności przeciwnej.

Trudne pojęcie granic ekstremalnych zilustrujemy dowodem następującego faktu.

2.59. **Fakt.** *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym o wyrazach dodatnich. Wtedy*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

D o w ó d. Niech $\beta = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Aby udowodnić żądaną nierówność wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \beta + \varepsilon.$$

W tym celu zauważmy, że na mocy Faktu 2.58 istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie że

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \beta + \varepsilon, \qquad n > N.$$

Zatem dla $n > N$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N \le (\beta+\varepsilon)^{n-N} a_N \\ &= \frac{a_N}{(\beta+\varepsilon)^N} (\beta+\varepsilon)^n = C_N(\beta+\varepsilon)^n, \end{aligned}$$

gdzie $C_N = \frac{a_N}{(\beta+\varepsilon)^N}$, a stąd

$$\sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{C_N}\,(\beta+\varepsilon)$$

i wobec tego

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &\le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_N}\,(\beta+\varepsilon) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_N}\,(\beta+\varepsilon) = \beta+\varepsilon, \end{aligned}$$

czego należało dowieść. $\square$

3. Funkcje elementarne

Funkcjami elementarnymi będziemy nazywać funkcję tożsamościową $x \mapsto x$, funkcję wykładniczą, funkcje trygonometryczne oraz wszystkie funkcje, jakie można otrzymać z wyżej wymienionych drogą następujących operacji: ograniczania dziedziny, dodawania, mnożenia, dzielenia i odwracania funkcji, gdy jest to możliwe. Tak więc wśród funkcji elementarnych znajdą się także funkcja logarytmiczna, wielomiany, funkcje wymierne, kołowe, hiperboliczne i wiele innych.

W tym rozdziale podamy precyzyjne definicje tych funkcji i wypunktujemy ich najprostsze własności.

Potęgę liczby dodatniej a o wykładniku naturalnym definiujemy indukcyjnie:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \\ a^{n+1} = a \cdot a^n. \end{cases}$$

Następujące własności potęgi o wykładniku naturalnym dowolnej liczby $a > 0$ są oczywiste:

(1) $a^n > 0$,

(2) $a^{n+m} = a^n a^m$,

(3) jeśli $a > 1$ i $n < m$, to $a^n < a^m$.

3.1. **Twierdzenie.** *Dla każdej liczby dodatniej a i każdego naturalnego $n \neq 0$ istnieje liczba dodatnia y taka, że $y^n = a$.*

D o w ó d . Ustalmy dowolnie liczbę $a > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Niech

$$E = \{x \geq 0 \colon x^n < a\}.$$

Zauważmy, że E jest niepusty (bo $0 \in E$) i ograniczony, gdyż

$$a < 1 \quad \Rightarrow \quad E \subseteq [0, 1]$$

oraz

$$a \geq 1 \quad \Rightarrow \quad E \subseteq [0, a].$$

Stąd E ma kres górny. Niech

$$y = \sup E.$$

Oczywiście y jest liczbą nieujemną. Pokażemy, że y jest szukaną liczbą, tzn. $y^n = a$. Zauważmy najpierw, że jeśli

$$E \ni x_k \xrightarrow{k \to \infty} y,$$

to

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k^n \leq a,$$

więc na mocy Wniosku 2.9 (i własności (c) z Twierdzenia 2.19)

$$y^n \leq a.$$

Wystarczy zatem pokazć, że $y^n \geq a$. W tym celu, zauważmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ jest $y + \frac{1}{k} \notin E$, więc

$$\left(y + \frac{1}{k}\right)^n \geq a,$$

a stąd po przejściu do granicy $y^n \geq a$. Teraz widać też, że $y > 0$. $\square$

3.2. **Fakt.** *Niech $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Jeśli dla $y_1, y_2 > 0$ zachodzi $y_1^n = a = y_2^n$, to $y_1 = y_2$.*

D o w ó d. Skoro

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^n = \frac{y_1^n}{y_2^n} = \frac{a}{a} = 1,$$

to

$$\frac{y_1}{y_2} = 1,$$

co daje tezę. $\square$

Możemy teraz wprowadzić następujące definicje. Jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $a > 0$ jest liczbą rzeczywistą, to **pierwiastkiem arytmetycznym stopnia** n **z liczby** a nazywamy taką liczbę $x > 0$, że $x^n = a$. Piszemy wtedy

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Potęgę liczby dodatniej a **o wykładniku wymiernym** $w = \frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, definiujemy następująco:

$$a^w = a^{\frac{p}{q}} = \begin{cases} \sqrt[q]{a^p}, & p > 0 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{1}{a}\right)^{-p}}, & p < 0. \end{cases}$$

Oczywiście dla potęgi o wykładniku wymiernym własności (1) - (3) są również spełnione.

Potęgę liczby dodatniej a **o wykładniku rzeczywistym** x definiujemy następująco:

$$a^x = \sup\{a^w \colon \mathbb{Q} \ni w \leq x\},$$

gdy $a \geq 1$, oraz

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x},$$

gdy $0 < a < 1$.

Aby wykazać, że definicja ta ma sens, wystarczy sprawdzić, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zbiór

$$E(x) = \{a^w \colon \mathbb{Q} \ni w \leq x\}$$

ma kres górny. Ale $a^{[x]} \in E(x)$, bo $[x] \le x$, więc $E(x) \ne \emptyset$. Ponadto

$$a^w \in E(x) \qquad \Rightarrow \qquad a^w < a^{[x]+1},$$

więc $w \le [x] + 1$, co oznacza, że $E(x)$ jest ograniczony od góry.

Sprawdźmy teraz, że potęga o wykładniku rzeczywistym zachowuje własności (1) - (3). Oczywiście $a^x \ge a^{[x]} > 0$, bo $[x] \in \mathbb{Q}$, co dowodzi (1).

Zamierzamy teraz pokazać, że

$$a^{x+y} = \sup E(x+y) = \sup E(x) \cdot \sup E(y) = a^x \cdot a^y.$$

Niech $\mathbb{Q} \ni w \le x$ oraz $\mathbb{Q} \ni v \le y$. Wtedy $w + v \le x + y$, więc

$$a^w \cdot a^v = a^{w+v} \in E(x+y),$$

skąd

$$a^w \cdot a^v \le a^{x+y}.$$

Ponieważ

$$\forall\, \mathbb{Q} \ni w \le x \qquad a^w \cdot a^v \le a^{x+y},$$

więc

$$\sup\{a^w \cdot a^v \colon\ \mathbb{Q} \ni w \le x\} = a^x \cdot a^v \le a^{x+y}.$$

Analogicznie

$$\forall\, \mathbb{Q} \ni v \le y \qquad a^x \cdot a^v \le a^{x+y} \qquad \Rightarrow \qquad a^x \cdot a^y \le a^{x+y}.$$

Pozostaje jeszcze dowieść nierówności przeciwnej. W tym celu weźmy dowolne

$$\mathbb{Q} \ni u \le x + y$$

Czytelnik sam sprawdzi, że istnieją $w, v \in \mathbb{Q}$, takie że $u = w + v$ i $w \le x$, $v \le y$. Wtedy

$$a^u = a^{w+v} = a^w \cdot a^v \le a^x \cdot a^y,$$

skąd

$$a^{x+y} = \sup\{a^u \colon\ \mathbb{Q} \ni u \le x + y\} \le a^x \cdot a^y.$$

Zatem i własność (2) jest spełniona. Przechodząc do dowodu (3) zauważmy, że jeśli $x < y$, to

$$\exists u, v \in \mathbb{Q} \qquad x < u < v < y,$$

więc

$$a^x = \sup\{a^w \colon\ \mathbb{Q} \ni w \le x\} \le a^u < a^v \le \sup\{a^w \colon\ \mathbb{Q} \ni w \le y\} = a^y,$$

bo (3) zachodzi dla wykładników wymiernych $u < v$.

Zauważmy jeszcze, że dla każdego $a \ge 1$ i każdego $x \in \mathbf{R}$

$$|a^x - 1| \le a^{|x|} - 1. \tag{3.3}$$

Rzeczywiście, jeśli $x \ge 0$, mamy po prostu równość, a jeśli $x < 0$, to

$$|a^x - 1| = 1 - a^x = a^x(a^{-x} - 1) < a^{-x} - 1 = a^{|x|} - 1,$$

bo $a^x < 1$.

Dla dowolnego $a > 0$ funkcję

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x \in (0, \infty)$$

nazywamy **funkcją wykładniczą o podstawie a**. Jeśli $a = e$, to funkcję

$$x \longmapsto e^x$$

nazywamy po prostu **funkcją wykładniczą**.

3.4. **Twierdzenie.** *Niech* $a > 0$. *Wtedy*

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad a^{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} a^x.$$

D o w ó d. Przyjmijmy najpierw, że $a \geq 1$ i $0 \neq x_n \to 0$. Dzięki nierówności (3.3) wystarczy rozpatrzyć przypadek $x_n > 0$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $x_n \leq w_n < 2x_n$, gdzie $w_n \in \mathbf{Q}$. Na mocy nierówności Bernoulliego

$$(1+\varepsilon)^{1/x_n} > (1+\varepsilon)^{1/w_n} > 1 + \frac{\varepsilon}{w_n} > 1 + \frac{\varepsilon}{2x_n} > a,$$

jeśli n jest dostatecznie duże, czyli

$$a^{x_n} - 1 < \varepsilon,$$

a to dowodzi naszej tezy.

Jeśli teraz $x_n \to x$, to

$$|a^{x_n} - a^x| = a^x |a^{y_n} - 1|,$$

gdzie $y_n = x_n - x \to 0$ i możemy skorzystać z już przeprowadzonej części dowodu.

Wreszcie, gdy $0 < a < 1$, to

$$a^{x_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_n} \longrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = a^x,$$

co kończy dowód. □

Obecnie możemy uzasadnić nierówność Bernoulliego dla wykładników niewymiernych.

3.5. **Wniosek.** *Dla każdego* $1 \leq y \in \mathbf{R}$ *i każdego* $x > -1$ *zachodzi nierówność*

$$(1+x)^y \geq 1 + yx.$$

D o w ó d. Rzeczywiście, niech $\alpha_n \geq y$ będzie ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do y. Wtedy na mocy Twierdzenia 3.4

$$\begin{aligned}(1+x)^y &= \lim_{n\to\infty} (1+x)^{\alpha_n} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} (1+\alpha_n x) = 1 + yx\end{aligned}$$

dla $x > -1$. □

Zwróćmy przy okazji uwagę, że dla $0 < y < 1$ zachodzi nierówność przeciwna

$$(1+x)^y \leq 1 + yx, \qquad x > -1,$$

co łatwo wydedukować z nierówności Bernoulliego, podnosząc obie strony do potęgi $1/y$. Z tej zaś nierówności natychmiast wynika kolejna

$$e^x \leq 1 + (e-1)x \tag{3.6}$$

dla $0 \leq x \leq 1$. W tej ostatniej nierówności moglibyśmy zresztą zastąpić e przez jakąkolwiek liczbę $a > 0$.

Podobnie jak Wniosku 3.5 dowodzimy nierówności

$$(1+x)^\alpha < 1 + x^\alpha \tag{3.7}$$

dla $x > 0$ i $0 < \alpha \leq 1$, wychodząc od Wniosku 1.5.

3.8. **Twierdzenie.** *Niech $0 < a_n \to a > 0$. Wtedy dla każdego $x \in \mathbf{R}$*

$$a_n^x \xrightarrow{n\to\infty} a^x.$$

D o w ó d. Łatwo zredukować dowód do sytuacji, gdy $a = 1$ i $x > 0$, co pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Niech najpierw $x \geq 1$. Niech $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Wtedy dla dostatecznie dużych $n \in \mathbf{N}$

$$a_n > 1 - \frac{\varepsilon}{x}, \qquad 1/a_n > 1 - \frac{\varepsilon}{x},$$

więc

$$a_n^x > \left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right)^x \geq 1 - \varepsilon, \qquad (1/a_n)^x > \left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right)^x \geq 1 - \varepsilon,$$

skąd

$$1 - \varepsilon < a_n^x < \frac{1}{1-\varepsilon} \leq 1 + 2\varepsilon,$$

tak jak chcieliśmy. Mamy bowiem

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Jeśli natomiast $0 < x < 1$, rozumujemy podobnie. Dla dostatecznie dużych $n \in \mathbf{N}$

$$a_n < 1 + \frac{\varepsilon}{x}, \qquad 1/a_n < 1 + \frac{\varepsilon}{x},$$

więc

$$a_n^x < \left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right)^x \leq 1 + \varepsilon, \qquad (1/a_n)^x < \left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right)^x \leq 1 + \varepsilon,$$

skąd

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < a_n^x < 1 + \varepsilon,$$

co kończy dowód. $\square$

3.9. **Fakt.** *Jeśli* $1 < a_n \to \infty$, *to*

$$A_n = \big(1 + 1/a_n\big)^{a_n} \longrightarrow e, \qquad B_n = \big(1 - 1/a_n\big)^{-a_n} \longrightarrow e,$$

D o w ó d . Przyjmijmy najpierw, że $a_n \in \mathbf{N}$. Wtedy wszystkie wyrazy ciągu $\{A_n\}$ są również wyrazami ciągu o wyrazach

$$e_n = \big(1 + 1/n\big)^n$$

z co najwyżej skończoną ilością powtórzeń, więc

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} e_n = e.$$

Dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Mamy bowiem

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \le A_n \le \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

i na mocy pierwszej części dowodu skrajne ciągi są zbieżne do e.

Druga część tezy wynika z równości

$$B_n = \Big(\frac{a_n}{a_n - 1}\Big)^{a_n} = \Big(1 + \frac{1}{a_n - 1}\Big)^{a_n}$$

i wcześniejszych rozważań. □

3.10. **Twierdzenie.** *Dla każdego* $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{|x|\le n\to\infty} \big(1 + x/n\big)^n = e^x. \tag{3.11}$$

D o w ó d . Jeśli $x = 0$, teza jest trywialna. Jeśli $x \neq 0$, to $a_n = \frac{n}{x} \to \pm\infty$ zależnie od znaku x. W obu przypadkach

$$\big(1 + x/n\big)^n = \Big(\big(1 + 1/a_n\big)^{a_n}\Big)^x \longrightarrow e^x$$

na mocy Faktu 3.9 i Twierdzenia 3.8. □

Przyjrzyjmy się jeszcze ciągowi (3.11). Jeśli $x \neq 0$ i $n \ge |x|$, to z nierówności Bernoulliego wynika, że

$$\Big(1 + \frac{x}{n+1}\Big)^{n+1} = \left(\Big(1 + \frac{x}{n+1}\Big)^{\frac{n+1}{n}}\right)^n > \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n,$$

a więc ciąg ten dla $n \ge |x|$ jest ściśle rosnący.

3.12. **Wniosek.** *Dla każdego* $x \neq 0$

$$e^x > 1 + x.$$

Dla każdego $0 \neq x < 1$

$$e^x < 1 + \frac{x}{1-x}.$$

D o w ó d . Jeśli $x \neq 0$, to dzięki nierówności Bernoulliego

$$\big(1 + x/n\big)^n > 1 + x,$$

więc po przejściu do granicy i skorzystaniu z tego, że ciąg (3.11) jest rosnący, otrzymujemy

$$e^x > 1 + x.$$

Stąd, jeśli dodatkowo $x < 1$,

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} < \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x},$$

co kończy dowód. $\square$

3.13. **Lemat.** *Dla ustalonego* $x > 0$ *niech*

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

Wtedy

$$a_n b_n = 1 + c_n,$$

gdzie $c_n \to 0$.

D o w ó d . Mamy

$$\begin{aligned} a_n b_n &= \sum_{0 \le k,j \le n} \frac{x^k (-x)^j}{k!j!} \\ &= 1 + \sum_{0 < k+j \le n} \frac{x^k(-x)^j}{k!j!} + \sum_{1 \le k,j \le n \text{ i } k+j > n} \frac{x^k(-x)^j}{k!j!} \\ &= 1 + d_n + c_n = 1 + c_n, \end{aligned}$$

bo

$$d_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} \sum_{k+j=p} \binom{p}{k} x^k (-x)^j,$$

gdzie

$$\sum_{k+j=p} \binom{p}{k} x^k (-x)^j = \big(x + (-x)\big)^p = 0.$$

Aby zakończyć dowód, oszacujemy wartość bezwzględną c_n przez ciąg zbieżny do zera. Istotnie,

$$\begin{aligned} |c_n| &\le \sum_{1\le k,j\le n \text{ i } k+j>n} \frac{x^{k+j}}{k!j!} \le \sum_{n<k+j\le 2n} \frac{x^k(-x)^j}{k!j!} \\ &\le \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{x^p}{p!} \sum_{k+j=p} \binom{p}{k} = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{(2x)^p}{p!} \\ &\le (2x+1)^{2n} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p!} < \frac{(2x+1)^{2n}}{n!\cdot n}, \end{aligned}$$

a ten ciąg dąży do zera. Ostatnie oszacowanie pochodzi z Przykładu 2.30. □

3.14. **Twierdzenie.** *Dla każdego* $x \in \mathbf{R}$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

D o w ó d . Dla $x = 0$ równość jest oczywista. Dla $x > 0$ rozumowanie jest identyczne, jak w przypadku $x = 1$ (patrz rozdział 2), więc je pominiemy. Wreszcie, tezę dla $x < 0$ otrzymujemy jako wniosek z przypadku $x > 0$, stosując Lemat 3.13. □

3.15. **Wniosek.** *Dla każdego* $|x| \le 1$ *i każdego* $n \in N$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + r_n(x),$$

gdzie

$$|r_1(x)| \le (e-1)|x|, \qquad |r_n(x)| \le \frac{|x|^n}{(n-1)!(n-1)}, \qquad n \ge 2.$$

D o w ó d . Jak łatwo zauważyć

$$r_n(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k!}.$$

Jak wiemy z Przykładu 2.30, dla $n \ge 2$

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k!} \right| \le \sum_{k=n}^{m} \frac{|x|^k}{k!} \le |x|^n \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k!} < \frac{|x|^n}{(n-1)!(n-1)},$$

bo $|x| \le 1$. Oszacowanie dla $n = 1$ widać bezpośrednio. Zatem po przejściu do nieskończoności z m, widać, że reszty r_n spełniają żądane nierówności. □

Warto dobrze zapamiętać najprostsze przypadki tej nierówności:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + r_1(x) = 1 + x + r_2(x) \\ &= 1 + x + x^2/2 + r_3(x), \qquad |x| \le 1, \end{aligned}$$

gdzie

$$|r_1(x)| \le (e-1)|x|, \qquad |r_2(x)| \le |x|^2, \qquad |r_3(x)| \le |x|^3/4.$$

Dla oznaczenia funkcji wykładniczej będziemy też używali symbolu

$$\exp x = e^x.$$

3.16. **Fakt.** *Obrazem* $\mathbf{R}$ *przez funkcję wykładniczą jest cała półprosta dodatnia. Innymi słowy,*

$$\exp(\mathbf{R}) = (0, \infty).$$

D o w ó d . Niech dla $y > 0$

$$E = \{x \in \mathbf{R} : e^x < y\}.$$

Ponieważ

$$e^{-1/y} < y < e^y,$$

zbiór E jest niepusty i ograniczony z góry. Niech $a = \sup E$. Istnieje ciąg o wyrazach $x_n \in E$ zbieżny do a, więc

$$e^a = \lim_{n\to\infty} e^{x_n} \le y.$$

Z drugiej strony $a + 1/n \notin E$, więc

$$e^a = \lim_{n\to\infty} e^{a+1/n} \ge y,$$

co kończy dowód. □

Stąd i z własności (3) potęgi wnioskujemy, że funkcja wykładnicza

$$\exp : \mathbf{R} \to (0, \infty)$$

jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem $\mathbf{R}$ na półprostą $(0, \infty)$. Istnieje zatem funkcja do niej odwrotna

$$\log : (0, \infty) \to \mathbf{R},$$

którą nazywamy **funkcją logarytmiczną**.

Następujące własności funkcji logarytmicznej wynikają wprost z definicji:

(1) $\log 1 = 0, \qquad \log e = 1,$

(2) $\log x \cdot y = \log x + \log y, \qquad x, y > 0,$

(3) $\log x^y = y \log x, \qquad x > 0,\ y \in \mathbf{R},$

(4) $a^x = e^{x \log a}, \qquad a > 0,\ x \in \mathbf{R}$,

(5) log jest funkcją ściśle rosnącą.

Poniższe nierówności mają podstawowe znaczenia dla badania funkcji logarytmicznej.

3.17. **Wniosek.** *Dla każdego* $0 \neq x > -1$

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x.$$

D o w ó d. Logarytmując pierwszą z nierówności Wniosku 3.12 dla $0 \neq x > -1$, otrzymujemy drugą z nierówności dla logarytmu. Druga z nierówności Wniosku 3.12

$$e^x < 1 + \frac{x}{1-x}, \qquad 0 \neq x < 1,$$

po podstawieniu $y = \frac{x}{1-x} > -1$, daje

$$e^{\frac{y}{1+y}} < 1 + y, \qquad y > -1,$$

a stąd przez zlogarytmowanie otrzymujemy pierwszą z naszych nierówności. □

Dla $x = \frac{1}{n}$ otrzymujemy

3.18. **Wniosek.** *Dla każdego* $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{n+1} < \log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{n}.$$

3.19. **Wniosek.** *Dla każdego* $0 < \alpha \leq 1$ *i każdego* $x > 0$

$$\log(1+x) < \frac{1}{\alpha}\, x^\alpha.$$

D o w ó d. Mamy

$$\alpha \log(1+x) = \log(1+x)^\alpha \leq \log(1+x^\alpha) < x^\alpha,$$

skąd po podzieleniu przez α dostajemy żądaną nierówność. Skorzystaliśmy tu z nierówności (3.7). □

Stosując twierdzenie Stoltza nietrudno się przekonać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\log n} \;=\; 1.$$

Rzeczywiście, $\{b_n\}$ jest ciągiem ściśle rosnącym i rozbieżnym do nieskończoności oraz

$$\frac{a'_{n-1}}{b'_{n-1}} = \frac{1/n}{\log(1+1/n)} \longrightarrow 1,$$

na mocy Wniosku 3.18 i twierdzenia trzech ciągach. Obecnie jesteśmy już gotowi, aby wskazać na jeszcze ściślejszy związek obu tych ciągów.

3.20. **Lemat.** *Ciąg*

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

jest zbieżny.

Dowód. Zwróćmy najpierw uwagę, że

$$\log(n+1) - \log n = \log(1 + 1/n) \longrightarrow 0,$$

więc wystarczy rozważać ciąg

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \big(\log(k+1) - \log k\big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \log(1+1/k)\Big). \end{aligned}$$

Z Wniosku 3.18 wynika, że ciąg $\{c_n\}$ jest rosnący, a ponadto

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \log(1+1/k)\Big) < \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

więc jest również ograniczony. Jest zatem zbieżny, a przecież o to chodziło. □

Granicę ciągu $\{\gamma_n\}$ będziemy oznaczać przez γ i nazywać **stałą Eulera**. Zatem

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \log\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)\right). \tag{3.21}$$

Dokładne oszacowanie stałej Eulera musimy odłożyć na dużo później. Na razie wspomnijmy tylko o tym, że nie wiadomo nawet, czy jest ona liczbą wymierną, czy nie.

Przechodzimy teraz do definicji funkcji hiperbolicznych i trygonometrycznych. Funkcje

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

nazywamy odpowiednio **cosinusem** i **sinusem hiperbolicznym**. Wprost z definicji łatwo wynikają natępujące własności tych funkcji. *Cosinus* hiperboliczny jest funkcją parzystą, a *sinus* nieparzystą. Ponadto zachodzi wzór

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

zwany **jedynką hiperboliczną**. Nietrudno też spostrzec, że sinh jako suma dwóch funkcji ściśle rosnących jest funkcją ściśle rosnącą. Stąd i z jedynki trygonometrycznej wnioskujemy, że cosh jest funkcją ściśle rosnącą na półprostej $[0, \infty)$. Wreszcie z Twierdzenia 3.14 wynika, iż

$$\cosh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sinh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Wbrew pozorom podanie ścisłej analitycznej definicji funkcji trygonometrycznych nie jest wcale proste. Jednym z możliwych rozwiązań jest skorzystanie z następującego twierdzenia.

3.22. **Twierdzenie.** *Istnieje dokładnie jedna para funkcji*

$$s : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}, \qquad c : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$$

o następujących własnościach. Dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$

(1) $s(x)^2 + c(x)^2 = 1$,
(2) $s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$,
(3) $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$,
(4) $0 < xc(x) < s(x) < x$ *dla* $0 < x < 1$.

Są to oczywiście niektóre z dobrze znanych własności funkcji trygononometrycznych *cosinusa* i *sinusa*. Nasze twierdzenie mówi, że wyszczególnione wyżej własności są aksjomatyczne w tym sensie, że można z nich wywieść wszystko, co skądinąd wiemy o funkcjach trygonometrycznych, a także że są one wystarczające do jednoznacznego określenia tych funkcji. Nawiasem mówiąc, ta druga część twierdzenia (jednoznaczność) przysparza więcej kłopotu. Część pierwsza jest bardziej elementarna, choć nieco żmudna.

Ze względu na brak czasu nie będziemy dowodzić tego twierdzenia, ani nawet systematycznie wyprowadzać pozostałych własności funkcji trygonometrycznych. Podkreślmy jednak wyraźnie, że np. ciągłość funkcji trygonometrycznych, jak i okresowość wraz z wszystkimi innymi ich cechami są na mocy Twierdzenia 3.22 konsekwencją własności (1) – (4).

4. Granica i ciągłość funkcji

W niniejszym rozdziale zgodnie z jego tytułem wprowadzamy pojęcie granicy funkcji, definiujemy funkcje ciągłe i omawiamy ich podstawowe własności.

Definicja. [Heine] Niech $f\colon \mathbf{R} \supseteq D \to \mathbf{R}$. Niech $x_0 \in \mathbf{R}$ będzie taki, by istniały liczby $a < x_0 < b$ takie, że $(a, x_0) \cup (x_0, b) \subseteq D$. Mówimy, że **funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą** równą g, jeśli

$$\Big(\forall\ \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq (a, x_0) \cup (x_0, b)\Big)\ \Big(x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} g\Big).$$

Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

4.1. **Przykład.** Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \tag{4.2}$$

gdyż jeśli $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, to również $|x_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, a skoro

$$|\sin x_n| \le |x_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

to także

$$\sin x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wynika stąd natychmiast, że

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1,$$

gdyż jeśli $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, to od pewnego miejsca $|x_n| < \frac{\pi}{2}$ i wtedy

$$\cos x_n = (1 - \sin^2 x_n)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

4.3. **Przykład.** Obliczymy granicę funkcji

$$f\colon\ \mathbf{R} \setminus \{0\} \ni x \longmapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbf{R}$$

w punkcie $x_0 = 0$. Zauważmy, że dla dowolnego $x > 0$ mamy

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$$

a zatem

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x},$$

i skoro $\sin x > 0$,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ponieważ *sinus* jest funkcją nieparzystą, a *cosinus* parzystą, ta sama nierówność obowiązuje też dla $x < 0$.

Weźmy teraz dowolny ciąg $0 \neq x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Ponieważ dla dużych n

$$\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

oraz

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1,$$

więc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

4.4**. Przykład.** Rozważmy funkcję

$$f\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \ni x \longmapsto x \sin(1/x) \in \mathbf{R}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0,$$

gdyż dla dowolnego ciągu $0 \neq x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ mamy

$$|x_n \sin(1/x_n)| = |x_n| \cdot |\sin(1/x_n)| \leq |x_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

4.5**. Przykład.** Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to [0,1)$ zadana wzorem

$$f(x) = \mathbf{m}(x)$$

nie ma granicy w żadnym punkcie $x_0 = c \in \mathbf{Z}$, gdyż na przykład dla ciągów

$$x_n = c - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} c, \qquad y_n = c + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} c$$

otrzymujemy

$$f(x_n) = \mathbf{m}\Big(c - \frac{1}{2n}\Big) = 1 - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$
$$f(y_n) = \mathbf{m}\Big(c + \frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

4.6**. Przykład.** W podobny sposób pokażemy, że funkcja

$$f\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \ni x \longmapsto \sin\frac{1}{x} \in \mathbf{R}$$

nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$. Rozważmy bowiem ciągi

$$x_n = \Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\Big)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad y_n = (2\pi n)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Otrzymujemy

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad f(x_n) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\Big) = 1,$$

oraz

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad f(y_n) = \sin(2\pi n) = 0,$$

zatem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

4.7. **Przykład.** Sprawdzimy jeszcze, że dla $a > 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

Mamy bowiem na mocy Wniosku 3.15

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \log a + \frac{r_2(x \log a)}{x},$$

gdzie dla $|x|$ dostatecznie bliskich zera $|r_2(x \log a)| \leq x^2 \log^2 a$, co pokazuje, że drugi składnik sumy dąży do zera.

4.8. **Przykład.** Niech $0 < a \leq b$. Wtedy dla każdego $x \neq 0$

$$a \leq \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} \leq b,$$

więc wyrażenie stojące w środku, oznaczmy je przez $S_x(a, b)$, można uważać za rodzaj średniej liczb a, b. I rzeczywiście,

$$S_{-1}(a, b) = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1}, \qquad S_1(a, b) = \frac{a + b}{2}$$

są odpowiednio średnią harmoniczną i arytmetyczną tych liczb. Pokażemy, że

$$\lim_{x\to 0} S_x(a, b) = \sqrt{ab}.$$

W tym celu zauważmy najpierw, że

$$S_x(a, b) = a\left(\frac{1 + c^x}{2}\right)^{1/x} = aF(x),$$

gdzie $c = b/a \geq 1$. Mamy więc

$$F(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \log \frac{1 + c^x}{2}\right),$$

gdzie wykładnik spełnia nierówności

$$\frac{c^x - 1}{x(c^x + 1)} < \frac{1}{x} \log \frac{1 + c^x}{2} < \frac{c^x - 1}{2x}.$$

Na mocy poprzedniego przykładu obie skrajne funkcje dążą do $\frac{\log c}{2}$, więc

$$\lim_{x\to 0} F(x) = e^{\frac{\log c}{2}} = \sqrt{c} = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

a stąd natychmiast wynika nasza teza.

Podamy teraz inną definicję granicy funkcji w punkcie, która, jak pokażemy za chwilę, okaże się równoważna.

Definicja. [Cauchy] Niech $f\colon \mathbf{R} \supseteq D \to \mathbf{R}$. Niech $x_0 \in \mathbf{R}$ będzie taki, że istnieją liczby $a < x_0 < b$ takie, że $(a,b) \setminus \{x_0\} \subseteq D$. Mówimy, że **funkcja** f **ma w punkcie** x_0 **granicę właściwą** równą g, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \Big(0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon\Big).$$

4.9. **Twierdzenie.** *Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą $g \in \mathbf{R}$ w sensie Heinego dokładnie wtedy, gdy ma ją w sensie Cauchy'ego.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że funkcja f ma granicę g w sensie Cauchy'ego równą g. Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ elementów dziedziny D funkcji f zbieżny do punktu x_0. Chcemy pokazać, że

$$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} g.$$

Ustalmy w tym celu dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Na mocy naszego założenia istnieje taka liczba $\delta > 0$, że

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon,$$

natomiast ze zbieżności ciągu $\{x_n\}$ wynika, że istnieje taka liczba $N \in \mathbf{N}$, że

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_0| < \delta.$$

Wobec tego dla takich n

$$|f(x_n) - g| < \varepsilon.$$

Przypuśćmy teraz, że funkcja nie ma granicy w sensie Cauchy'ego. Wtedy

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D \qquad \big(\,|x - x_0| < \delta \quad \wedge \quad |f(x) - g| \geq \varepsilon\,\big).$$

Stąd, dla każdego $\delta_n = \frac{1}{n}$ możemy znaleźć $x_0 \neq x_n \in D$, takie że

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \qquad \text{oraz} \qquad |f(x_n) - g| \geq \varepsilon.$$

Pierwsza nierówność mówi, że ciąg $\{x_n\}$ jest, zbieżny do x_0, a druga, że ciąg wartości $\{f(x_n)\}$ nie jest zbieżny do g, co oznacza, zgodnie z definicją według Heinego, że $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq g$. $\square$

4.10. **Przykład.** Zilustrujemy obie definicje na przykładzie granicy w punkcie $x_0 = 0$ funkcji

$$f(x) = \sin x^2.$$

Weźmy dowolny ciąg liczb niezerowych $\{x_n\}$ zbieżny do zera. Wtedy również

$$x_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

a stąd, na mocy równości (4.2),

$$\sin x_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

co oznacza, że

$$\lim_{x\to 0} \sin x^2 = 0$$

zgodnie z definicją Heinego.

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ dla każdego x

$$|\sin x^2| < |x|^2,$$

więc jeżeli $|x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, to

$$|\sin x^2| < |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon,$$

co oznacza, że

$$\lim_{x\to 0} \sin x^2 = 0$$

zgodnie z definicją Cauchy'ego.

4.11. **Fakt** (Arytmetyka granic). *Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to także funkcje $f+g$ oraz $f \cdot g$ mają w tym punkcie granice i*

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Ponadto, jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, to funkcja $1/g$ jest określona w bliskości punktu x_0 i

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie, przy którym warto pamiętać o analogicznej arytmetyce granic ciągów. Zauważmy jeszcze, że w dowolnym punkcie granica funkcji stałej określonej na całej prostej jest równa jej wartości. Stąd natychmiast otrzymujemy następujące wnioski.

4.12. **Wniosek.** *Jeśli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to*

(1) $\forall \alpha \in \mathbf{R} \qquad \lim\limits_{x\to x_0} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, *o ile* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

4.13. **Przykład.** Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n.$$

Wynika to z faktu, że dla $x \neq 1$

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1,$$

gdzie każdy ze składników po prawej dąży do 1, gdy $x \to 1$.

4.14. **Przykład.** Poprzedni przykład można przy pewnym nakładzie pracy uogólnić. Niech $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i niech $\beta \neq 0$. Wtedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Rzeczywiście, na mocy Wniosku 3.15
$$\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}=\frac{e^{\alpha\log x}-1}{e^{\beta\log x}-1}=\frac{\alpha\log x+r_2(\alpha\log x)}{\beta\log x+r_2(\beta\log x)},$$
gdzie $|r_2(y)|\le y^2$ dla $|y|\le 1$, więc
$$\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}=\frac{\alpha+\frac{r_2(\alpha\log x)}{\log x}}{\beta+\frac{r_2(\beta\log x)}{\log x}},$$
gdzie
$$\left|\frac{r_2(\gamma\log x)}{\log x}\right|\le|\gamma||\log x|$$
dąży do zera, gdy x dąży do 1, dla $\gamma=\alpha$ i $\gamma=\beta$, co dowodzi naszej tezy.

4.15. **Przykład.** Granica w punkcie $x_0=0$ funkcji
$$f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\}\ni x\longmapsto\frac{\cos x-1}{x}\in\mathbf{R}$$
istnieje i wynosi zero. Mamy bowiem
$$f(x)=\frac{\cos x-1}{x}=\frac{-2\sin^2(x/2)}{x}=-\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\sin(x/2)$$
i ponieważ pierwszy czynnik dąży do 1, a drugi do 0, to wobec własności (2) z Faktu 4.11 otrzymujemy
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$

Zdefiniujmy teraz granice jednostronne funkcji. Niech $f\colon \mathbf{R}\supseteq D\to\mathbf{R}$ oraz $(a,b)\subseteq D$. Mówimy, że f ma **granicę właściwą lewostronną w punkcie** b równą α, jeśli
$$\forall\{x_n\}\subseteq(a,b)\qquad\big(\,x_n\xrightarrow{n\to\infty}b\quad\Rightarrow\quad f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}\alpha\,\big),$$
lub równoważnie
$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\, a<x_0<b\quad\forall x\in D\quad\big(x_0<x<b\quad\Rightarrow\quad|f(x)-\alpha|<\varepsilon\big).$$
Piszemy wtedy
$$\lim_{x\to b-}f(x)=\alpha.$$
W analogiczny sposób definiujemy granicę prawostronną funkcji w punkcie a, którą oznaczamy przez $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$.

4.16. **Przykład.** Obliczmy obie granice jednostronne części ułamkowej w punkcie $x_0=0$. Ponieważ dla dowolnego ciągu liczb ujemnych $\{x_n\}$ zbieżnego do zera
$$\exists N\quad\forall n>N\qquad x_n>-1,$$
więc dla takich n
$$\mathbf{m}(x_n)=x_n-[x_n]=x_n+1,$$

skąd
$$\mathbf{m}(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$
czyli
$$\lim_{x\to 0-} \mathbf{m}(x) = 1.$$
Podobnie, w dowolnym ciągu liczb dodatnich $\{x_n\}$ zbieżnym do zera, od pewnego miejsca wyrazy są mniejsze od 1, więc ich część całkowita wynosi 0. Oznacza to, że dla dostatecznie dużych n
$$\mathbf{m}(x_n) = x_n,$$
czyli
$$\lim_{x\to 0+} \mathbf{m}(x) = 0.$$

4.17. **Fakt.** *Jeśli funkcja f ma w pewnym punkcie x_0 obie granice jednostronne oraz*
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \alpha,$$
to funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą α.

D o w ó d . Posłużymy się definicją Cauchy'ego. Niech będzie dany $\varepsilon > 0$. Z założenia wynika, że istnieją $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 >$, takie że
$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon, \qquad |f(y) - \alpha| < \varepsilon,$$
o ile $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ i $x_0 < y < x_0 + \delta_2$. Niech $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Z powyższego widać natychmiast, że jeśli $0 < |z - x_0| < \delta$, to $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$. $\square$

4.18. **Przykład.** Pokażemy, że funkcja
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x < 0 \\ \sinh x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$
ma granicę w zerze. Istotnie, skoro dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do zera $\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^0 = 1$ (por. Twierdzenie 3.4 więc
$$\lim_{x\to 0} e^x = 1,$$
a stąd
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sinh x = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0.$$
Ponadto
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \sin x = \lim_{x\to 0} \sin x = 0,$$
a zatem
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

4.19. **Przykład.** Sprawdzimy, że

$$\lim_{x\to 0+} x\log x = 0.$$

Rzeczywiście, niech $(0,1) \ni x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Korzystając z nierówności

$$\log(1+z) < \frac{1}{\alpha}\, z^{\alpha}, \qquad z > 0, \qquad 0 < \alpha \le 1,$$

dla $\alpha = 1/2$, widzimy, że

$$|x_n \log x_n| = \big|x_n \log(1/x_n)\big| \le 2x_n\sqrt{1/x_n - 1} \le 2\frac{x_n}{\sqrt{x_n}} = 2\sqrt{x_n},$$

skąd natychmiast wynika nasza teza.

Definicja. Mówimy, że funkcja f określona na przedziale (a,b) jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in (a,b)$, jeżeli w tym punkcie granica funkcji istnieje i jest równa wartości funkcji, czyli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Mówimy, że funkcja f określona na przedziale $[a,b]$ jest **ciągła w punkcie** a (odpowiednio b), jeżeli w tym punkcie granica prawostronna (odp. lewostronna) istnieje i jest równa wartości funkcji, czyli

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a) \qquad \Big(\text{odp. } \lim_{x\to b-} f(x) = f(b)\Big).$$

Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze D jest **ciągła w przedziale** $I \subseteq D$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

4.20. **Przykład.** W rozdziale 3 pokazaliśmy, że

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \quad \Rightarrow \quad \exp(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \exp(x)$$

(zobacz Twierdzenie 3.4 Oznacza to, że funkcja wykładnicza

$$\mathbf{R} \ni x \longmapsto \exp(x)$$

jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbf{R}$.

Z Faktu 4.11 wynika natychmiast

4.21. **Fakt.** *Jażeli funkcje f, g są ciągłe w pewnym punkcie x_0 należącym do dziedzin obu funkcji, to funkcje $f+g$ oraz $f\cdot g$ także są ciągłe w tym punkcie.*

4.22. **Przykład.** Wielomian jest funkcją ciągłą na $\mathbf{R}$. Istotnie, każdy wielomian jest funkcją postaci

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n,$$

wystarczy zatem sprawdzić, że dla dowolnych liczb $\alpha \in \mathbf{R}$ oraz $n \in \mathbf{N}$ funkcja

$$\mathbf{R} \ni x \longmapsto \alpha x^n$$

jest ciągła. Jeszcze raz korzystając z powyższego faktu, widzimy, że cała rzecz sprowadza się więc do ciągłości funkcji stałej i tożsamościowej $x \mapsto x$, a to jest oczywiste.

4.23. **Przykład.** Jak wiemy funkcja logarytmiczna $\log : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ jest funkcją odwrotną do wykładniczej, która jest ciągła. To pozwala wnioskować o ciągłości funkci log. Rzeczywiście, niech $x_n \to x$ wraz z $n \to \infty$, gdzie $x\,, x_n > 0$. Z Twierdzenia 2.50 wynika, że wystarczy, jeśli pokażemy, iż dla każdego zbieżnego do y podciągu $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ ciągu o wyrazach $y_n = \log x_n$, jest $y = \log x$.

Istotnie, na mocy naszych założeń

$$x_{n_k} = e^{y_{n_k}},$$

gdzie ciąg po lewej jest zbieżny do x, a ten po prawej do e^y. Zatem $x = e^y$, czyli $y = \log x$.

W dowodzie Twierdzenia 4.38 poniżej jeszcze raz skorzystamy z tego rozumowania, aby uogólnić powyższy fakt. Tam też Czytelnik znajdzie więcej szczegółów.

4.24. **Lemat.** *Niech będą dane ciągłe funkcje $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$. Jeśli $f(w) = g(w)$ dla wymiernych $w \in [a, b]$, to $f = g$.*

D o w ó d. Niech $x \in [a, b]$. Niech $w_n \in [a, b]$ będzie ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do x. Wtedy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty} g(w_n) = g(x),$$

więc $f = g$. $\square$

4.25. **Fakt.** *Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, tzn. jeśli $f : I \to J$, $g : J \to K$ oraz f jest ciągła w punkcie $x \in I$ a g w punkcie $y = f(x)$, to funkcja $g \circ f : I \to K$ jest ciągła w x.*

D o w ó d. Dla dowolnego ciągu $\{x_n\} \subseteq I$ zbieżnego do x, z ciągłości funkcji f w punkcie x wynika, że

$$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) = y,$$

a stąd wobec ciągłości funkcji g w punkcie y

$$g(f(x_n)) \xrightarrow{n\to\infty} g(y) = g(f(x)).$$

Pokazaliśmy więc

$$\forall\,\{x_n\} \subseteq I \qquad x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \quad\Rightarrow\quad g \circ f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} g \circ f(x),$$

co zgodnie definicją Heinego oznacza ciągłość funkcji $g \circ f$ w punkcie x. $\square$

4.26. **Przykład.** Na mocy powyższego faktu, funkcja

$$f : (0, \infty) \ni x \longmapsto x^x = \exp(x \log x)$$

jest ciągła jako złożenie ciągłej funkcji wykładniczej (Przykład 4.20) z funkcją

$$x \longmapsto x \log x,$$

która jest iloczynem dwu funkcji ciągłych; jest więc także ciągła. Ponadto, możemy położyć w zerze taką wartość, aby przedłużenie f_1 funkcji f było nadal funkcją ciągłą. Mianowicie, z Przykładu 4.19 i ciągłości funkcji wykładniczej wynika, że

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = 1,$$

a stąd

$$f_1(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

jest ciągła na $[0, \infty)$.

4.27. **Przykład.** Funkcje trygonometryczne są ciągłe na swoich dziedzinach. Oczywiście wystarczy sprawdzić ciągłość funkcji *sinus* i *cosinus*. Ustalmy zatem dowolnie punkt $x_0 \in \mathbf{R}$ i weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ zbieżny do niego. Wtedy

$$h_n = x_n - x_0 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

skąd (na mocy Faktu 4.11 i Przykładu 4.1)

$$\begin{aligned} \sin x_n &= \sin(h_n + x_0) \\ &= \sin h_n \cdot \cos x_0 + \cos h_n \cdot \sin x_0 \xrightarrow{n\to\infty} \sin x_0 \end{aligned}$$

i analogicznie

$$\begin{aligned} \cos x_n &= \cos(h_n + x_0) \\ &= \cos h_n \cdot \cos x_0 - \sin h_n \cdot \sin x_0 \xrightarrow{n\to\infty} \cos x_0. \end{aligned}$$

Ciekawym przykładem funkcji, która ma wiele punktów ciągłości, jak i nieciągłości, jest **funkcja Riemanna**.

4.28. **Przykład.** Niech f będzie funkcją określoną na całej prostej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin \mathbf{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{gdy } x = \frac{p}{q}, \text{ gdzie } (p, q) = 1. \end{cases}$$

Pokażemy, że f jest ciągła dokładnie w punktach niewymiernych. Istotnie, jeśli $x_n \to x \notin \mathbf{Q}$, to wartości $f(x_n)$ są równe 0, gdy x_n są niewymierne, i równe mianownikom x_n, gdy x_n są wymierne. Ponieważ wartość graniczna x jest niewymierna, mianowniki te dążą do nieskończoności, co pokazuje, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(x).$$

Jeśli natomiast $x \in \mathbf{Q}$, to $f(x) \neq 0$, i istnieje ciąg liczb niewymiernych, np. $x_n = x + \frac{e}{n}$ zbieżny do x. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(x).$$

Pamiętamy, że kresy górny i dolny zostały zdefiniowane dla podzbiorów $E \subset \mathbf{R}$ ograniczonych odpowiednio z góry i z dołu. Wygodnie będzie rozszerzyć związaną z tym notację, tak aby objąć nią także zbiory nieograniczone. W związku z tym przyjmiemy następującą definicję:
Jeśli $\mathbf{R} \supseteq E \neq \emptyset$ jest nieograniczony z góry, to będziemy mówić, że E ma **kres górny niewłaściwy** i pisać $\sup E = \infty$. Analogicznie, jeśli $\mathbf{R} \supseteq E \neq \emptyset$ jest nieograniczony z dołu, to będziemy mówić, że E ma **kres dolny niewłaściwy** i pisać $\inf E = -\infty$. Definicja ta pozwoli nam na przykład na pisanie $\sup E < \infty$, co jest oczywiście równoważne powiedzeniu, że zbiór E jest ograniczony od góry. Podobnie fakt, że zbiór E jest ograniczony od dołu możemy wyrazić krótko, pisząc $\inf E > -\infty$.
Mówimy, że **funkcja** $f\colon \emptyset \neq D \to \mathbf{R}$ **jest ograniczona z góry** (odpowiednio z dołu), jeśli jej zbiór wartości jest ograniczony z góry (odp. z dołu), tzn.

$$\sup f(D) = \sup_{x\in D} f(x) < \infty \qquad \big(\text{odp. } \inf f(D) = \inf_{x\in D} f(x) > -\infty\big).$$

4.29**. Twierdzenie.** *Funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest ograniczona i osiąga swoje kresy.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$$

jest ciągła i nieograniczona. Wtedy istnieje ciąg $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ taki, że

$$|f(x_n)| \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \tag{4.30}$$

Ponieważ $\{x_n\}$ ograniczony, więc na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ zbieżny do pewnego x_0. Skoro

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \qquad a \le x_{n_k} \le b,$$

to również $a \le x_0 \le b$, tzn. x_0 należy do dziedziny f, i wobec ciągłości f

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(x_0),$$

co przeczy (4.30).
Pozostaje dowieść, że f przyjmuje wartość największą i najmniejszą. Niech

$$\alpha = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Z definicji kresu wynika, że

$$\exists \{x_n\} \subseteq [a,b] \qquad f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \alpha.$$

Podobnie jak poprzednio wybieramy podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do pewnego $x_0 \in [a,b]$. Wtedy

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \alpha,$$

a z ciągłości funkcji f w punkcie x_0

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(x_0),$$

skąd $\alpha = f(x_0)$. Analogicznie pokazujemy, że istnieje $x_1 \in [a,b]$ takie, że

$$f(x_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

co kończy dowód. $\square$

4.31. **Twierdzenie** (Darboux). *Jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz*

$$f(a) < y < f(b),$$

to istnieje $c \in (a,b)$, takie że $f(c) = y$.

Dowód. Niech

$$E = \{x \in [a,b]\colon\ f(x) < y\}.$$

Skoro $a \in E$ i $b \notin E$, więc $\emptyset \neq E \subset [a,b]$. Jeśli przyjmiemy, że

$$c = \sup E,$$

to $a < c < b$ oraz

$$\exists\,\{x_n\} \subseteq E \qquad x_n \xrightarrow{n\to\infty} c.$$

Z ciągłości funkcji f

$$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(c),$$

a ponieważ

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad f(x_n) < y,$$

więc

(4.32) $$f(c) \leq y.$$

Wybierzmy z odcinka $[a,b]$ ciąg zbieżny do c od góry, np.

$$z_n \;=\; c + (b-c)/n \;\xrightarrow{n\to\infty}\; c,$$

a wtedy

$$\big(\,\forall\, n \in \mathbf{N} \quad z_n \notin E\,\big) \quad\Rightarrow\quad \big(\,\forall\, n \in \mathbf{N} \quad f(z_n) \geq y\,\big) \quad\Rightarrow\quad f(c) \geq y$$

i wobec (4.32)

$$f(c) = y,$$

co pokazuje tezę. $\square$

Oczywiście twierdzenie Darboux pozostaje prawdziwe, gdy $f(b) < y < f(a)$. Niech bowiem $g = -f$ i $z = -y$. Wtedy $g(a) < z < g(b)$ i istnieje $a < c < b$, takie że $g(c) = z$, czyli $f(c) = y$.

4.33. **Wniosek.** *Obrazem odcinka domkniętego przez funkcję ciągłą jest odcinek domknięty. Dokładniej, jeśli*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$$

jest ciągła, to

$$f\big([a,b]\big) = \Big[\min_{x\in[a,b]} f(x)\ ,\ \max_{x\in[a,b]} f(x)\Big].$$

Dowód. Na mocy Twierdzenia 4.29 funkcja f jest ograniczona i osiąga swoje kresy, czyli

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1)$$

oraz

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2)$$

dla pewnych $x_1, x_2 \in [a,b]$. Oczywiście

$$f\big([a,b]\big) \subseteq \big[f(x_1), f(x_2)\big]. \tag{4.34}$$

Na mocy twierdzenia Darboux

$$\forall\, y \in \big(f(x_1)\,,\, f(x_2)\big) \qquad \exists\, c \in (x_1, x_2) \qquad f(c) = y,$$

tzn.

$$\big[\,f(x_1)\,,\, f(x_2)\,\big] \subseteq f\big([a,b]\big),$$

co wobec (4.34) daje tezę. $\square$

4.35. **Wniosek.** *Jeśli*

$$f\colon\ (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$$

jest ciągła i różnowartościowa, to jest ściśle monotoniczna.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że f nie jest monotoniczna, tzn. istnieją

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b, \tag{4.36}$$

takie że

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{i} \qquad f(x_2) > f(x_3),$$

albo

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{i} \qquad f(x_2) < f(x_3).$$

Bez zmniejszania ogólności załóżmy, że zachodzi pierwsza z koniunkcji. Wtedy

$$\exists\, y \qquad y \in \big(f(x_1), f(x_2)\big) \cap \big(f(x_3), f(x_2)\big),$$

skąd, na mocy twierdzenia Darboux,

$$\exists\, c_1 \in (x_1, x_2) \qquad f(c_1) = y$$

oraz

$$\exists\, c_2 \in (x_2, x_3) \qquad f(c_2) = y,$$

co wobec (4.36) oznacza, że $c_1 \neq c_2$ i tym smym jest sprzeczne z założeniem różnowartościowości funkcji f. $\square$

I jeszcze jeden wniosek z twierdzenia Darboux.

4.37. **Wniosek** (o punkcie stałym). *Niech $f : [a,b] \to [a,b]$ będzie ciągła. Istnieje $c \in [a,b]$, takie że $f(c) = c$.*

D o w ó d . Rozważmy funkcję $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ zadaną wzorem $g(x) = x - f(x)$. Chcemy pokazać, że g ma miejsce zerowe. Oczywiście, $g(a) \leq 0 g(b)$, więc albo któryś z punktów a, b jest miejscem zerowym, albo

$$g(a) < 0 < g(b)$$

i wtedy na mocy własności Darboux istnieje $c \in (a,b)$, takie że $g(c) = 0$, bo przecież g jest funkcją ciągłą. Ale skoro tak, to $f(c) = c$, a o to nam przecież chodziło. $\square$

4.38. **Twierdzenie.** *Jeśli*

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

jest ciągłą bijekcją, to

$$f^{-1}\colon\ [c,d] \longrightarrow [a,b]$$

jest również ciągła.

D o w ó d . Weźmy dowolny ciąg $\{y_n\} \subseteq [c,d]$ zbieżny do pewnego $y \in [c,d]$. Skoro

$$\{f^{-1}(y_n)\} \subseteq [\,a,b\,],$$

to na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa możemy wybrać podciąg zbieżny

$$f^{-1}(y_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} x.$$

Z ciągłości funkcji f

$$f\big(f^{-1}(y_{n_k})\big) \xrightarrow{k\to\infty} f(x),$$

a ponieważ

$$f\big(f^{-1}(y_{n_k})\big) = y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y,$$

więc $y = f(x)$, czyli $x = f^{-1}(y)$.

Skoro, jak pokazaliśmy, dowolny podciąg zbieżny ciągu ograniczonego $\{f^{-1}(y_n)\}$ jest zbieżny do tej samej liczby $f^{-1}(y)$, to na mocy Twierdzenia 2.50

$$f^{-1}(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} f^{-1}(y),$$

co oznacza, że funkcja f^{-1} jest ciągła. $\square$

Podaliśmy już w obu wersjach, Heinego i Cauchy'ego, precyzyjne definicje granicy liczbowej w punkcie oraz granic jednostronnych liczbowych w punkcie. W podobny sposób formułuje się definicję granicy liczbowej w $+\infty$ i w $-\infty$. I tak, dla funkcji f o dziedzinie $D \supseteq (-\infty, a)$, gdzie $a \in \mathbf{R}$, mamy

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \\
\iff\quad & \forall\,\{x_n\} \subseteq D \quad \big(x_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \quad\Rightarrow\quad f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \alpha\big) \\
\iff\quad & \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,K < a \quad \forall\,x < K \qquad |f(x) - \alpha| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Obok granic liczbowych (czyli właściwych) mamy jeszcze odpowiadające im granice niewłaściwe. Dobrze by było, gdyby Czytelnik spróbował sam sformułować odpowiednie definicje. My ograniczymy się do poniższych przykładów:

Granica niewłaściwa w punkcie skończonym:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \\ \iff \quad & \forall\,\{x_n\} \quad \big(x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty\big) \\ \iff \quad & \forall\,K<0 \quad \exists\,\delta>0 \quad \big(|x-x_0|<\delta \quad \Rightarrow \quad f(x)<K\big). \end{aligned}$$

Granica lewostronna niewłaściwa w punkcie skończonym:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0-} f(x) = \infty \\ \iff \quad & \forall\,\{x_n\}\subseteq(a,x_0) \quad \big(x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty\big) \\ \iff \quad & \forall\,M>0 \quad \exists\,x_1<x_0 \quad \big(x_1<x<x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x)>M\big). \end{aligned}$$

Granica niewłaściwa w nieskończoności:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \\ \iff \quad & \forall\,\{x_n\} \quad \big(x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty\big) \\ \iff \quad & \forall\,K<0 \quad \exists\,M>0 \quad \forall\,x>M \qquad f(x)<K. \end{aligned}$$

Na zakończenie tego rozdziału omówimy jeszcze funkcje addytywne, podaddytywne i lipschitzowskie. Przypomnijmy, że funkcja $f : D \to \mathbf{R}$ spełniająca warunek

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y, x+y \in D,$$

nazywa się **addytywna**.

4.39. **Twierdzenie.** *Jeżeli $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą i addytywną, to istnieje stała $c \in \mathbf{R}$, taka że*

$$f(x) = cx, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

D o w ó d. Rozumując indukcyjnie, łatwo pokazać, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ i każdego $n \in \mathbf{N}$ jest $f(nx) = nf(x)$. Z addytywności wynika też, że $f(0) = 0$. Z tych dwóch warunków mamy $f(nx) = nf(x)$ dla $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$, więc, podstawiając $x = \frac{1}{n}$, otrzymujemy

$$f\Big(\frac{m}{n}\Big) = mf\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

a w szczególności dla $m = n$

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} f(1),$$

skąd następnie

$$f\Big(\frac{m}{n}\Big) = mf\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{m}{n} f(1).$$

Kładąc $c = f(1)$, mamy

$$f(x) = cx, \qquad x \in \mathbf{Q}.$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy skorzystać z Lematu 4.24. $\square$

Funkcja $f : D \to \mathbf{R}$ spełniająca warunek

$$f(x+y) \le f(x) + f(y), \qquad x, y, x+y \in D,$$

nazywa się **podaddytywna**.

4.40. **Przykład.** Niech $f(x) = |x|^\alpha$, gdzie $0 < \alpha \le 1$, dla $x \in \mathbf{R}$. Ta funkcja jest podaddytywna, co wynika z nierówności (3.7). Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} f(x+y) = |x+y|^\alpha &\le (|x| + |y|)^\alpha \\ &\le |x|^\alpha + |y|^\alpha = f(x) + f(y) \end{aligned}$$

dla $x, y \in \mathbf{R}$.

4.41. Uwaga. Jeśli $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ jest parzystą funkcją podaddytywną, to

$$|f(x) - f(y)| \le f(x-y), \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

Faktycznie,

$$f(x) = f(y + (x-y)) \le f(y) + f(x-y),$$

więc

$$f(x) - f(y) \le f(x-y), \qquad f(y) - f(x) \le f(y-x),$$

dla $x, y \in \mathbf{R}$, a stąd już natychmiast wynika teza.

Mówimy, że funkcja $f : I \to \mathbf{R}$ spełnia **warunek Lipschitza** ze stałą $C > 0$, jeśli

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|, \qquad x, y \in I.$$

4.42. **Przykład.** a) Taką funkcją jest np. $\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$. Rzeczywiście,

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

więc

$$|\sin x - \sin y| \le 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \le |x-y|.$$

Stała Lipschitza wynosi $C = 1$.

b) Niech teraz $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = 1/x$. Mamy

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y-x}{xy} \right| \le |x-y|,$$

więc f jest także lipschitzowska ze stałą $C = 1$.

c) Funkcja wykładnicza $(-\infty, a] \ni x \mapsto e^x \in \mathbf{R}$ spełnia warunek Lipschitza. Istotnie, jeśli $x \ge y$,

$$e^x - e^y = e^x(1 - e^{y-x}) \le e^x(x-y) \le e^a(x-y),$$

gdyż $e^z \ge 1 + z$ dla $z = y - x \in \mathbf{R}$. Wobec tego

$$|e^x - e^y| \le e^a|x-y|, \qquad x, y \le a.$$

Tutaj $C = e^a$.

d) Mamy też

$$\big||x| - |y|\big| \le |x - y|,$$

więc i funkcja $x \mapsto |x|$ jest lipschitzowska ze stałą 1.

4.43. **Twierdzenie.** *Funkcja $f : I \to \mathbf{R}$ spełniająca warunek Lipschitza jest ciągła w każdym punkcie.*

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $I \ni x_n \to x_0 \in I$, to

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le C|x_n - x_0| \to 0,$$

więc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. $\square$

Niech będzie dana funkcja $f : I \to \mathbf{R}$. Warunek Lipschitza można wyrazić też tak: Istnieje stała $C > 0$, taka że dla wszelkich $x, y \in I$, $x \neq y$,

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \le C.$$

Innymi słowy, funkcja lipschitzowska, to funkcja o ograniczonych **ilorazach różnicowych**, a optymalną stałą Lipschitza jest

$$C = \sup_{x\neq y}\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right|.$$

4.44. **Przykład.** Wróćmy do funkcji z Przykładu 4.40. Jest ona lipschitzowska na przedziale $[1, \infty)$. Rzeczywiście, jeśli $0 < \alpha \le 1$ i $1 \le y \le x$, to

$$x^\alpha - y^\alpha = x^{\alpha-1}(x - y) + y(x^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}),$$

gdzie drugi składnik sumy po prawej jest już niedodatni. Zatem

$$|x^\alpha - y^\alpha| \le |x - y|, \qquad x, y \ge 1.$$

4.45. **Przykład.** Rozważmy jeszcze funkcję $f(x) = x^\alpha$ dla $\alpha > 1$. Pokażemy, że jest ona lipschitzowska na przedziale $[0, 1]$. Niech $0 \le y < x \le 1$. Jeśli $2y \le x$, to

$$x^\alpha - y^\alpha \le x^\alpha \le 2(x - y)^\alpha \le 2(x - y),$$

więc pozostaje rozpatrzyć przypadek $2y \ge x$. Wtedy

$$\begin{aligned} x^\alpha - y^\alpha &= x^\alpha\big(1 - e^{\alpha\log\frac{y}{x}}\big) \\ &\le \alpha x^\alpha \log\frac{y}{x} \le \alpha x^\alpha\frac{x - y}{y} \\ &\le 2^\alpha\alpha(x - y), \end{aligned}$$

co dowodzi naszej tezy.

5. Szeregi

Niech będzie dany nieskończony ciąg liczbowy $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ciąg

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazywamy ciągiem **sum częściowych** ciągu $\{a_k\}$. Jeżeli ciąg $\{A_n\}$ jest zbieżny, mówimy, że ciąg $\{a_k\}$ jest **sumowalny**, a granicę

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

nazywamy jego **sumą** i oznaczamy przez $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Tak więc z definicji

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

o ile ciąg $\{a_k\}$ jest sumowalny.

Tradycyjna terminologia jest trochę inna. Za pomocą symbolu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

oznacza się nie tylko sumę ciągu $\{a_k\}$, gdy jest on sumowalny. Używa się go także w przypadku ciągów niesumowalnych dla zaznaczenia samej **intencji** badania sumowalności ciągu. I tak zamiast *ciąg* $\{a_k\}$ *jest sumowalny* bądź *niesumowalny* mówi się *szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny* bądź *rozbieżny*, a zamiast *suma nieskończonego ciągu* $\{a_k\}$ mówi się *suma szeregu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Podobnie sformułowanie *dany jest szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wyraża to samo, co *dany jest ciąg* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, *a my będziemy starali się rozstrzygnąć, czy jest on sumowalny i ewentualnie obliczyć jego sumę.*

Terminologia ta może wydawać się nieprecyzyjna, ale jest tak wygodna i tak powszechnie stosowana, że warto przy niej pozostać. W chwilach pomieszania, które często zdarzają się adeptom analizy, można zawsze sięgnąć do ścisłych definicji podanych wyżej.

Badanie zbieżności szeregów jest w istocie badaniem zbieżności ciągów specjalnego typu. Czytelnik przypomina sobie, że tego typu ciągi występowały już wcześniej w naszych rozważaniach. Oto przykłady szeregów zbieżnych:

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$, o ile $|q| < 1$,

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$,

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ dla $x \in \mathbf{R}$,

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$,

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \log(1+\frac{1}{k}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(1+\frac{1}{k}) = \gamma$.

Wiemy również, że następujące szeregi są rozbieżne:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$,

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ dla $|q| \geq 1$,

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$,

Ten ostatni szereg jest rozbieżny, bo jego sumy częściowe $A_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ nie mają granicy. Zwróćmy uwagę, że tradycyjna terminologia zmusiła nas przed chwilą do napisania symbolu *granicy* przed ciągami rozbieżnymi. Taka już jest jej uroda!

Wiemy, że ciąg zbieżny jest ograniczony. Dla szeregu oznacza to:

5.1. **Fakt.** *Ciąg sum częściowych szeregu zbieżnego jest ograniczony.*

Zwróćmy uwagę, że szereg (3) z wyżej wymienionych szeregów rozbieżnych ma ograniczone sumy częściowe.

5.2. **Fakt.** *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *o wyrazach nieujemnych jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy ciąg* $\{A_n\}$ *jego sum częściowych jest ograniczony.*

Dowód. Rzeczywiście $a_k \geq 0$ pociaga $A_{n+1} \geq A_n$. Skoro ciąg sum częściowych jest rosnący, jego zbieżność jest równoważna ograniczoności. □

Jeżeli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ma wyrazy nieujemne, to w myśl powyższego faktu ciąg jego sum częściowych jest zbieżny lub rozbieżny do nieskończoności. Dlatego będziemy pisać

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty,$$

aby krótko wyrazić zbieżność takiego szeregu, lub

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty,$$

aby zaznaczyć jego rozbieżność. Notacji tej nie wolno stosować do szeregów o wyrazach niekoniecznie nieujemnych.

5.3. **Fakt.** *Jeśli szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, to* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dowód. Mamy

$$a_n = A_n - A_{n-1}, \qquad n \geq 2,$$

gdzie A_n oznacza n-tą sumę częściową, skąd natychmiast wynika teza. □

Nie należy jednak sądzić, że warunek $a_k \to 0$ jest wystarczający dla zbieżności szeregu. Świadczy o tym choćby szereg (1) z umieszczonej wyżej listy szeregów rozbieżnych.

Ostatni dowód nasuwa pewne ważne spostrzeżenie. Powiedzieliśmy wcześniej, że szeregi to ciągi specjalnego typu. Nie jest to całkiem ścisłe, bo sugeruje jakoby szeregi stanowiły pewną właściwą podklasę klasy wszystkich ciągów. Tymczasem nietrudno zauważyć, że *każdy* ciąg można przedstawić w postaci szeregu, kładąc

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a'_k,$$

gdzie $a_0 = 0$. Krótko mówiąc, każdy ciąg $\{a_{k+1}\}$ jest ciągiem sum częściowych ciągu „pochodnych" $\{a'_k\}$. Lepiej więc powiedzieć, że badanie szeregów to badanie ciągów jako ciągów sum częściowych. Różnica polega na tym, że tu założenia formułuje się w terminach ciągu $\{a'_k\}$, a nie samego ciągu $\{a_k\}$.

5.4. **Fakt.** *Jeżeli szereg $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny, to zbieżny jest też każdy z szeregów*

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

D o w ó d . Rzeczywiście, jeśli

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

to sumy częściowe szeregu R_n są równe

$$R_n(m) = \sum_{k=n}^{m} a_k = A_m - A_{n-1},$$

więc $R_n(m) \to A - A_{n-1}$, gdy $m \to \infty$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} A - A_{n-1} = 0,$$

co było do okazania. $\square$

5.5. **Fakt.** *Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ isnieje $N \in \mathbf{N}$, takie że*

$$\Big| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \Big| < \varepsilon$$

dla $n > m \geq N$.

Dowód. Jako że

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k = A_n - A_m,$$

gdzie A_n jest n-tą sumą częściową szeregu, rozpoznajemy warunek Cauchy'ego z Twierdzenia 2.52, który jest równoważny zbieżności ciągu $\{A_n\}$, a więc zbieżności szeregu. $\square$

5.6. **Wniosek.** *Jeśli szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *jest zbieżny, to także szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, a ponadto*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Dowód. Zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wynika z nierówności trójkąta:

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

oraz z Faktu 5.5. Jeśli w ostatniej nierówności przyjmiemy $m = 0$, otrzymamy nierówność

$$|A_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

a po przejściu z n do nieskończoności drugą część tezy. $\square$

Mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest **bezwzględnie** (albo **absolutnie**) zbieżny, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Wyżej pokazaliśmy, że szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. Zwróćmy uwagę, że szereg (4) z wyżej umieszczonej listy szeregów zbieżnych nie jest bezwzględnie zbieżny. Taki szereg nazywamy **warunkowo** zbieżnym.

5.7. Uwaga. Wiemy, że zmiana skończonej ilości wyrazów w ciągu nie ma wpływu ani na jego zbieżność, ani na wartość granicy, o ile ta istnieje. Trochę inaczej wygląda sprawa z szeregami. Zmiana skończonej ilości wyrazów w szeregu oznacza dodanie pewnej stałej do wszystkich wyrazów ciągu sum częściowych począwszy od pewnego miejsca. Nie wpływa zatem na zbieżność szeregu, ale może wpłynąć na wartość jego sumy, gdy jest on zbieżny. W szczególności zbieżność szeregu

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

dla jakiegokolwiek $N \in \mathbf{N}$ pociąga zbieżność całego szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Zajmijmy się teraz szeregami o wyrazach nieujemnych. Oto tak zwane *kryterium porównawcze* zbieżności szeregów.

5.8. **Fakt.** *Niech będą dane dwa szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ o wyrazach nieujemnych, takich że $a_k \leq b_k$ dla dostatecznie dużych k. Wtedy zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ pociąga zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, natomiast rozbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pociąga rozbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.*

Dowód. Rzeczywiście, istnieje wtedy $N \in \mathbf{N}$, takie że dla $n > N$ mamy

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=N}^{n} b_k,$$

więc ograniczoność szeregu o wyrazach b_k pociąga ograniczoność szeregu o wyrazach a_k i odwrotnie – nieograniczoność szeregu po lewej pociąga nieograniczoność tego po prawej. To na mocy Faktu 5.2 dowodzi naszej tezy. □

5.9. **Przykład.** Zauważmy, że nierówność

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}, \qquad k > 1,$$

wraz ze zbieżnością szeregu $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ dowodzi na mocy kryterium porównawczego, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0.$$

Można jednak pokazać więcej. Mianowicie

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx \frac{1}{n},$$

a dokładniej

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1.$$

W tym celu wystarczy zauważyć, że dla każdego $k \geq 2$

$$\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}.$$

Sumując względem $2 \leq n \leq k \leq m$, dostajemy

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} < \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m},$$

skąd po przejściu granicznym względem m

$$1 < n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{n}{n-1},$$

a stąd już nasza teza na mocy twierdzenia o trzech ciągach.

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx \frac{1}{n}.$$

Porównując wyrazy danego szerego z wyrazami szeregu geometrycznego, otrzymujemy kryteria d'Alamberta i Cauchy'ego.

5.10. **Twierdzenie.** *Niech będzie dany szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ o wyrazach dodatnich. Jeżeli*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

to szereg jest zbieżny. Jeżeli natomiast

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1,$$

to szereg jest rozbieżny.

D o w ó d. Niech $\limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$. Oznacza to, że istnieje liczba $0 < q < 1$, taka że dla dostatecznie dużych $k \geq N$ mamy $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$, skąd

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \ldots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \leq q^{k-N} a_N = C_N q^k,$$

gdzie $C_N = \frac{a_N}{q^N}$. Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny.

Jeśli zaś $\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, to istnieje liczba $q > 1$, taka że dla dostatecznie dużych $k \geq N$ mamy $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq q$, skąd

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \ldots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \geq q^{k-N} a_N = C_N q^k,$$

gdzie $C_N = \frac{a_N}{q^N}$. Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest rozbieżny. □

5.11. U w a g a. Kryteria d'Alamberta nie mówią nic w sytuacji, gdy

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \qquad \text{lub} \qquad \liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1.$$

Tak się dzieje w przypadku szeregów

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

W obu przypadkach mamy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1,$$

a tymczasem pierwszy z tych szeregów jest rozbieżny, a drugi zbieżny.

5.12. **Przykład.** Rozważmy szeregi
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 5^{-k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 3^{-k}.$$
Mamy
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\binom{2k+2}{k+1} 5^{-k-1}}{\binom{2k}{k} 5^{-k}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{4}{5}$$
oraz
$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\binom{2k+2}{k+1} 3^{-k-1}}{\binom{2k}{k} 3^{-k}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{4}{3},$$
więc pierwszy szereg jest zbieżny, a drugi rozbieżny. Przykład ten dobrze ilustruje ten wygodny fakt, że w praktycznych zastosowaniach wyrażenie $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ często ma granicę.

Przechodzimy do kryteriów Cauchy'ego.

5.13. **Twierdzenie.** *Niech będzie dany szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ o wyrazach nieujemnych. Jeżeli*
$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1,$$
to szereg jest zbieżny. Jeżeli natomiast
$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1,$$
to szereg jest rozbieżny.

D o w ó d. Niech $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$. Oznacza to, że istnieje liczba $0 < q < 1$, taka że dla dostatecznie dużych $k \geq N$ jest $\sqrt[k]{a_k} < q$, czyli $a_k < q^k$, więc na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny.

Jeśli zaś $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, to istnieje liczba $q > 1$, taka że dla nieskończenie wielu k jest $\sqrt[k]{a_k} > q$, czyli $a_k > q^k$, więc ciąg $\{a_k\}$ nie dąży do zera, a to na mocy Faktu 5.3 oznacza, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest rozbieżny. $\square$

5.14. U w a g a. Podobnie jak kryteria d'Alamberta także kryteria Cauchy'ego nie mówią nic w sytuacji, gdy
$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1.$$
Można na poparcie tej tezy przytoczyć te same przykłady.

5.15. U w a g a. Mamy
$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Druga nierówność pochodzi z Faktu 2.59, a pierwszej dowodzi się analogicznie. Wynika stąd, że jeśli kryteria Cauchy'ego nie są w stanie rozstrzygnąć kwestii zbieżności szeregu, to i kryteria d'Alamberta zawodzą. Potocznie mówi się, że jeśli szereg *nie reaguje* na kryteria Cauchy'ego, to *nie reaguje* także na kryteria d'Alamberta.

5.16. **Przykład.** Niech będzie dany ciąg $\{a_k\}$ o wyrazach nieujemnych zbieżny do a. Wtedy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^k$ jest zbieżny, jeśli $a < 1$ i rozbieżny, jeśli $a > 1$. Niech np.

$$a_k = \left(\frac{(1+\varepsilon)^{1/k} + (1-\varepsilon)^{1/k}}{2} \right)^k,$$

gdzie $0 < \varepsilon < 1$. Na mocy Przykładu **4.7**

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \sqrt{1-\varepsilon^2} < 1,$$

więc, stosując kryterium Cauchy'ego, widzimy, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\varepsilon)^{1/k} + (1-\varepsilon)^{1/k}}{2} \right)^{k^2} < \infty.$$

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład.

5.17. **Przykład.** Niech będzie dany szereg o wyrazie ogólnym

$$a_k = \frac{3+(-1)^k}{2^k}.$$

Jak widać

$$a_k^{1/k} \le \left(\frac{4}{2^k}\right)^{1/k} \le \frac{4^{1/k}}{2},$$

więc $\limsup_{k\to\infty} a_k^{1/k} = 1/2$. Stąd

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^k}{2^k} < \infty.$$

W tym wypadku jednak lepiej skorzystać wprost z porównania ze zbieżnym szeregiem geometrycznym:

$$a_k \le \frac{4}{2^k}.$$

I jeszcze jedno kryterium badania zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich (nieujemnych), zwane kryterium Cauchy'ego *o zagęszczaniu.*

5.18. **Fakt.** *Niech* $\{a_k\}$ *będzie ciągiem malejącym liczb nieujemnych. Wówczas szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ *jest zbieżny.*

D o w ó d . Rzeczywiście,

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leq \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^n}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \geq \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n},$$

bo wyrazów a_k dla $2^n \leq k < 2^{n+1}$ jest 2^n i na mocy naszych założeń najmniejszym jest $a_{2^{n+1}-1} \geq a_{2^{n+1}}$, a największym a_{2^n}. Z udowodnionych nierówności wynika teza. $\square$

Co prawda wiemy już, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

a co za tym idzie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty, \qquad \alpha \geq 2,$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

i co za tym idzie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \infty, \qquad \alpha \leq 1,$$

ale kryterium o zagęszczaniu pozwala za jednym zamachem „zgłębić” wszystkie te przypadki, łącznie z tymi, których jeszcze brakuje.

5.19. **Wniosek.** *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *jest zbieżny, wtedy tylko wtedy gdy* $\alpha > 1$.

D o w ó d . Rzeczywiście, jeśli $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$, to

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{\alpha k}} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k,$$

a ostatni szereg, który jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = 2^{1-\alpha}$, jest zbieżny dokładnie wtedy, gdy $\alpha > 1$. $\square$

A oto interesujące uogólnienie Przykładu 5.9.

5.20. **Fakt.** *Dla każdego* $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} = \frac{1}{\alpha}.$$

D o w ó d. Rozważmy ciąg $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$. Mamy

$$-a_k' = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}\left(1 - \exp\left(-\alpha \log \frac{k+1}{k}\right)\right).$$

Stosując nierówność $1 - e^{-|x|} \le |x|$, dostajemy

$$-a_k' \le \frac{\alpha}{k^{1+\alpha}}.$$

Z drugiej strony

$$\frac{1}{k^\alpha}\left(1 - \exp\left(-\alpha \log \frac{k+1}{k}\right)\right) = \frac{\alpha}{k^\alpha}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) + \frac{\alpha}{k^1} r_2\left(\alpha \log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right),$$

gdzie $|r_2(x)| \le x^2$, więc

$$-a_k' \ge \frac{\alpha}{(k+1)^{1+\alpha}} - \frac{\alpha^2}{k^{2+\alpha}},$$

i ostatecznie

$$-a_k' \le \frac{\alpha}{k^{1+\alpha}} \le \left(\frac{\alpha^2}{(k-1)^{2+\alpha}} - a_{k-1}'\right).$$

Sumując otrzymujemy

$$\frac{1}{n^\alpha} \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha}{k^{1+\alpha}} \le \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \alpha^2 \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+\alpha}}.$$

Jako że

$$\sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+\alpha}} \le \frac{1}{(n-1)^\alpha} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{(n-1)^\alpha (n-2)},$$

widzimy, że

$$1 \le \alpha \cdot n^\alpha \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} \le \frac{n^\alpha}{(n-1)^\alpha} + \frac{\alpha^2 n^\alpha}{(n-1)^\alpha (n-2)}.$$

Drugi składnik po prawej dąży do zera, więc nasza teza jest konsekwencją twierdzenia o trzech ciągach. □

Nawiasem mówiąc, przez nieznaczną modyfikację przedstawionego przed chwilą rozumowania można otrzymać inny dowód Wniosku 5.19. Szczegóły pozostawiamy dociekliwemu Czytelnikowi do samodzielnego uzupełnienia.

Tyle na razie na temat szeregów o wyrazach nieujemnych. Przechodzimy do szeregów o wyrazach dowolnych. Jeżeli taki szereg jest zbieżny bezwzględnie, to w zasadzie jego badanie sprowadza się do badania szeregu wartości bezwzględnych, który ma wyrazy nieujemne. Jeśli jednak jest zbieżny tylko warunkowo, sprawa jest znacznie delikatniejsza.

5.21. **Twierdzenie** (Leibniz). *Jeśli ciąg $\{a_k\}$ maleje monotonicznie do zera, to szereg*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

jest zbieżny.

D o w ó d. Widzimy, że parzyste sumy częściowe

$$A_{2n} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geq 0$$

są ograniczone z dołu i tworzą ciąg malejący, bo

$$A_{2n+2} - A_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0,$$

natomiast sumy nieparzyste

$$A_{2n+1} = a_0 + (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \ldots (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq a_0$$

są ograniczone z góry i tworzą ciąg rosnący, bo

$$A_{2n+3} - A_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0.$$

Tak więc oba podciągi $\{A_{2n}\}$ i $\{A_{2n+1}\}$ są zbieżne i wobec

$$A_{2n} - A_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$$

mają wspólną granicę. Stąd ciąg sum częściowych jest zbieżny. □

Oprócz znanego nam już dobrze szeregu *anharmonicznego*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

dobrymi przykładami na twierdzenie Leibniza są szeregi

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\log\Big(1+\frac{1}{k}\Big), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Big(e-\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k\Big).$$

Rzeczywiście ciągi

$$a_k = \frac{1}{k}, \qquad b_k = \log\Big(1+\frac{1}{k}\Big), \qquad c_k = e - \Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k$$

są monotonicznie zbieżne do zera.

5.22. **Lemat.** *Niech będą dane dwa ciągi nieskończone $\{a_k\}$ i $\{b_k\}$. Dla dowolnych $m \leq n$ naturalnych zachodzi następująca tożsamość Abela:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b'_k = (a_{n+1}b_{n+1} - a_m b_m) - \sum_{k=m}^{n} a'_k b_{k+1},$$

gdzie, przypomnijmy, $a'_k = a_{k+1} - a_k$.

D o w ó d . Wystarczy zauważyć, że

$$\sum_{k=m}^{n}(a_kb_k)' = a_{n+1}b_{n+1} - a_mb_m,$$

a ponadto

$$(a_kb_k)' = a'_kb_{k+1} + a_kb'_k,$$

co daje tezę. $\Box$

Za pomocą tożsamości Abela udowodnimy bardzo ważną *nierówność Abela*, którą będziemy następnie wielokrotnie wykorzystywać przy badaniu rozmaitych szeregów.

5.23. **Twierdzenie.** *Załóżmy, że ciąg liczb nieujemnych $\{a_k\}$ jest monotoniczny, natomiast ciąg $\{b_k\}$ ma ograniczone sumy częściowe*

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

co oznacza, że istnieje $\beta \geq 0$, taka że $|B_n| \leq \beta$ dla każdego n. Wtedy

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_kb_k\Big| \leq 2\beta \max\{a_m, a_{n+1}\}.$$

D o w ó d . Na mocy tożsamości Abela

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_kb_k &= \sum_{k=m}^{n} a_kB'_{k-1}\\ &= (a_{n+1}B_n - a_mB_{m-1}) - \sum_{k=m}^{n} a'_kB_k,\end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=m}^{n} a_kb_k\Big| &\leq \beta(a_{n+1} + a_m + \sum_{k=m}^{n} |a'_k|)\\ &= \beta(a_{n+1} + a_m + |a_{n+1} - a_m|),\end{aligned}$$

bo ciąg $\{a_k\}$ jest monotoniczny. Rozpatrując osobno przypadki $a_{n+1} \leq a_m$, gdy ciąg jest malejący, i $a_m \leq a_{n+1}$, gdy ciąg jest rosnący, dostajemy tezę. $\Box$

Następujące *kryterium Abela* można uważać za uogólnienie podanego wyżej kryterium Leibniza.

5.24. **Twierdzenie.** *Jeżeli $\{a_k\}$ jest ciągiem malejącym do zera, a ciąg sum częściowych ciągu $\{b_k\}$ jest ograniczony, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_kb_k$ jest zbieżny.*

D o w ó d . Na mocy nierówności Abela

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\Big| \le 2\beta a_m,$$

gdzie

$$\beta = \sup_{n\in\mathbf{N}} \Big|\sum_{k=1}^{n} b_k\Big|.$$

Jeśli m jest dostatecznie duże, sumy pośrednie są małe, bo $a_n \to 0$. To zaś na mocy Faktu 5.5 oznacza, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ jest zbieżny. □

Warto zatrzymać się na chwilę, aby lepiej zrozumieć kryterium Abela. Przykład, który chcemy teraz zaprezentować, wymaga pewnych przygotowań. Zacznijmy od następującego lematu.

5.25. **Lemat.** *Ciąg $b_n = \sin n$ nie jest zbieżny do zera.*

D o w ó d . Pokażemy, że jest rzeczą niemożliwą, aby prawie wszystkie wyrazy naszego ciągu leżały w przedziale $(-1/2, 1/2)$. Przypuśćmy nie wprost, że

$$|\sin n| \le 1/2, \qquad n \ge N.$$

Wtedy dla takich n

$$|\cos n| = \sqrt{1-\sin^2 n} > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

więc

$$|\sin n| = \Big|\frac{\sin 2n}{2\cos n}\Big| < \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Powtarzając to rozumowanie, pokazujemy, że

$$|\sin n| < \frac{1}{2(\sqrt{3})^p}$$

dla każdego $p \in \mathbf{N}$, co pociąga $\sin n = 0$ dla $n \ge N$. To jednak jest absurdem, bo π jest liczbą niewymierną. □

Z lematu wynika, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k$ jest rozbieżny. Okazuje się jednak, że jego sumy częściowe są ograniczone.

5.26. **Fakt.** *Dla każdego x nie będącego wielokrotnością π*

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{n}{2}x \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

D o w ó d. Gdy $n = 1$ nasza tożsamość jest oczywista. Załóżmy, że jest ona prawdziwa dla pewnego $n \in \mathbf{N}$. Wtedy

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \sin kx + \sin(n+1)x = \frac{\sin \frac{n}{2}x \cdot \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} + \sin(n+1)x,$$

pozostaje więc dowieść równości

$$\frac{\sin \frac{n}{2}x \cdot \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} + \sin(n+1)x = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n+2}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},$$

co jest prostym ćwiczeniem z trygonometrii. $\square$

5.27. **Przykład.** Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem malejącym do zera i niech $b_k = \sin k$. Z Faktu 5.26 wynika, że dla każdego n

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k\Big| \leq \Big|\frac{\sin \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2}}{\sin \frac{1}{2}}\Big| \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}|},$$

więc sumy częściowe ciągu $\{b_k\}$ są ograniczone. Na mocy twierdzenia Abela szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k$$

jest więc zbieżny.

Dość podobnym do kryterium Abela jest *kryterium Dirichleta.* O ile jednak to pierwsze kojarzy się z warunkiem Leibniza, na to drugie dobrze jest spojrzeć w kontekście następującego prostego przykładu.

Jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest zbieżny *bezwzględnie*, a ciąg $\{a_k\}$ jest ograniczony, to

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| < \infty,$$

co nietrudno wywnioskować z kryterium porównawczego. Innymi słowy, wyrazy szeregu bezwzględnie zbieżnego można pomnożyć przez wyrazy ciągu ograniczonego, a otrzymany szereg będzie nadal zbieżny bezwzględnie. Tak oczywiście nie jest dla szeregów warunkowo zbieżnych. Aby się o tym przekonać, wystarczy wyrazy szeregu anharmonicznego pomnożyć przez ograniczony ciąg $(-1)^{k+1}$. Tym bardziej godne uwagi jest następujące twierdzenie Dirichleta, które mówi, że można to zrobić, jeśli ciąg $\{a_k\}$ jest *monotoniczny.*

5.28. **Twierdzenie.** *Niech $\sum_{k=1} b_k$ będzie szeregiem zbieżnym, a $\{a_k\}$ ograniczonym ciągiem monotonicznym. Wtedy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ jest zbieżny.*

D o w ó d. Niech

$$\beta_m = \sup_{p \geq m} \Big|\sum_{k=m}^{p} b_k\Big|.$$

Ponieważ szereg ten jest zbieżny, z Faktu 5.4 wynika, że $\beta_m \to 0$, gdy $m \to \infty$. Niech ponadto $|a_k| \leq \alpha$. Z nierówności Abela zastosowanej do ciągów $\{a_k\}_{k=m}^{\infty}$ i $\{b_k\}_{k=m}^{\infty}$ wynika, że

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\Big| \leq 2\alpha\beta_m,$$

co oznacza, że dla dużych m sumy pośrednie szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ są małe, a więc jest on zbieżny. □

5.29. **Przykład.** Jeśli ciąg $\{a_k\}$ maleje do zera, a ciąg $\{b_k\}$ jest rosnący i ograniczony, to szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k b_k$$

jest zbieżny. Istotnie, szereg $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ jest zbieżny na mocy twierdzenia Leibniza, więc wolno go pomnożyć przez wyrazy ciągu rosnącego i ograniczonego bez utraty zbieżności.

Na tym kończymy wstępne omówienie szeregów zbieżnych warunkowo. Do końca rozdziału pozostają nam jeszcze iloczyny Cauchy'ego i zagadnienie permutacji wyrazów w szeregu zbieżnym.

Niech będą dane dwa ciągi $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ i $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$. **Iloczynem Cauchy'ego** takich ciągów nazywamy ciąg o wyrazach $c_k = a_k \star b_k$ zdefiniowany następująco:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Zauważmy od razu, że iloczyn Cauchy'ego jest przemienny, tzn.

$$a_k \star b_k = b_k \star a_k$$

i rozdzielny względem dodawania ciągów:

$$a_k \star (b_k + d_k) = a_k \star b_k + a_k \star d_k,$$

co się łatwo i przyjemnie sprawdza. Mamy też

$$|a_n \star b_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k} b_k| \leq \max_{0\leq k\leq n} |a_k| \cdot \sum_{k=0}^{n} |b_k|. \tag{5.30}$$

5.31. **Lemat.** *Jeśli ciąg* $A_k \to A$ *i* $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| = \beta < \infty$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} A_n \star b_n = A \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

D o w ó d. Niech

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Ciąg $\{A_n\}$ jako zbieżny jest ograniczony, więc niech $|A_n| \le \alpha$. Niech będzie $\varepsilon > 0$. Istnieje $N \in \mathbf{N}$, takie że

$$|A_n - A_N| < \varepsilon, \qquad \sum_{k=N}^{\infty} |b_k| < \varepsilon$$

dla $n \ge N$. Przy tych oznaczeniach mamy

$$\begin{aligned} A_n \star b_n - A_n B_n &= \sum_{k=0}^{n} A_k b_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} A_n b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N} (A_k - A_n) b_{n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} (A_k - A_n) b_{n-k}, \end{aligned}$$

więc dla dużych N i $n \ge 2N$ na mocy (5.30)

$$\begin{aligned} |A_n \star b_n - A_n B_n| &\le \Big| \sum_{k=0}^{N} (A_k - A_n) b_{n-k} \Big| + \Big| \sum_{k=N+1}^{n} (A_k - A_n) b_{n-k} \Big| \\ &\le \max_{0 \le k \le N} |A_k - A_n| \sum_{k=N}^{n} |b_k| + \max_{N < k \le n} |A_k - A_n| \sum_{k=0}^{n} |b_k| \\ &\le 2\alpha\varepsilon + \beta\varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{n \to \infty} A_n \star b_n = \lim_{n \to \infty} A_n B_n = AB,$$

tak jak chcieliśmy. $\square$

5.32. **Twierdzenie** (o iloczynach Cauchy'ego). *Jeśli szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ jest zbieżny bezwzględnie, to szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \star b_k$ jest też zbieżny i zachodzi równość*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \star b_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

D o w ó d. Niech $c_n = a_n \star b_n$ i niech A_n oznaczają sumy częściowe pierwszego szeregu, A zaś i B sumy dwóch pierwszych. Jak łatwo się przekonać

$$C_n = A_n \star b_n,$$

więc na mocy Lematu 5.31 ciąg $\{C_n\}$ ma granicę równą AB, co jest naszą tezą. $\square$

Podamy najpierw przykład pozytywny, a po nim negatywny.

5.33. **Przykład.** Wiemy, że szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1,$$

jest bezwzględnie zbieżny. Mamy

$$a_n \star a_n = \sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = (n+1)q^n,$$

więc na mocy Twierdzenia 5.32

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2},$$

a stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

5.34. **Przykład.** Niech teraz $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ jest zbieżny warunkowo. Mamy

$$a_n \star a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}},$$

więc

$$|a_n \star a_n| \geq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sqrt{2}}{n+1} \geq \sqrt{2},$$

bo

$$k(n+1-k) \leq \frac{(n+1)^2}{2}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Zatem szereg iloczynów Cauchy'ego jest rozbieżny, gdyż jego wyraz ogólny nie dąży do zera. Widzimy, że założenie o absolutnej zbieżności przynajmniej jednego z szeregów w Twierdzeniu 5.32 jest istotne.

Wiemy, że w szeregu można bezkarnie przestawić skończoną liczbę wyrazów, nie tracąc zbieżności, ani nie zmieniając jego sumy. Czy wolno jednak dokonać nieskończonej permutacji wyrazów? Tak, jeśli szereg jest absolutnie zbieżny.

5.35. **Twierdzenie.** *Niech* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. *Wówczas dla każdej permutacji*

$$\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ *jest również zbieżny i*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty.$$

D o w ó d. Niech

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

i niech

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Zauważmy najpierw, że dla każdego n istnieje minimalne M_n, takie że

$$\{1, 2, \dots, n\} \subset \sigma\Big(\{1, 2, \dots M_n\}\Big),$$

bo permutacja σ jest surjekcją.

Dla $\varepsilon > 0$ niech N będzie takie, by

$$|A - A_N| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$

Wtedy dla $m \ge M = M_N$

$$|S_m - A_N| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon,$$

więc

$$|S_m - A| \le |S_m - A_N| + |A_N - A| \le 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon,$$

co dowodzi naszej tezy. □

5.36**. Wniosek.** *Przy założeniach i oznaczeniach Twierdzenia 5.35 mamy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| < \infty.$$

D o w ó d . Wystarczy zastosować Twierdzenie 5.35 do szeregu wartości bezwzględnych, by otrzymać żądaną zbieżność. □

Oto przykład pokazujący, że permutacja wyrazów szeregu *warunkowo* zbieżnego może zmienić jego sumę.

5.37**. Przykład.** Niech

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

będzie sumą częściową warunkowo zbieżnego szeregu anharmonicznego. Przez indukcję sprawdzamy, że

$$S_{4n} + \frac{1}{2} S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

Niech

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

będzie szeregiem. który jest permutacją szeregu anharmonicznego. Permutacja polega na tym, że po dwóch kolejnych wyrazach nieparzystych następuje jeden kolejny parzysty. Niech U_n będzie sumą częściową tego szeregu. Widać, że

$$U_{3n} = S_{4n} + \frac{1}{2}S_{2n} = U_{3n},$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} U_{3n} = \frac{3}{2}\log 2.$$

Zauważamy także, że

$$U_{3n+1} - U_{3n} \to 0, \qquad U_{3n+2} - U_{3n} \to 0,$$

więc szereg ten jest zbieżny, a jego suma wynosi $\frac{3}{2}\log 2$.

Permutacja wyrazów szeregu warunkowo zbieżnego może także zniweczyć jego zbieżność.

5.38. **Przykład.** Niech $\{n_k\}$ będzie ciągiem liczb naturalnych dobranym tak, aby $n_0 = 1$ oraz

$$\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{2j+1} > 1.$$

Rozważmy następującą permutację wyrazów szeregu anharmonicznego: Najpierw następuje n_1 kolejnych wyrazów nieparzystych, po nich pierwszy wyraz parzysty; potem znów n_2 wyrazów nieparzystych, drugi parzysty itd. Niech S_n będzie sumą częściową tej permutacji szeregu anharmonicznego. Jak widać

$$S_{n_k+1} > \frac{k}{2},$$

więc nowy szereg jest rozbieżny.

Okazuje się, że przez odpowiednią permutację wyrazów szeregu warunkowo zbieżnego można uzyskać „wszystko”– rozbieżność lub zbieżność do z góry wybranej sumy. Mówi o tym następujące twierdzenie, którego dowód pominiemy.

5.39. **Twierdzenie** (Riemann). *Niech $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ będzie szeregiem warunkowo zbieżnym. Dla każdego $\alpha \in \mathbf{R}$ istnieje permutacja wyrazów szeregu σ, taka że sumy częściowe*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

są zbieżne do α. Można też dobrać σ tak, by ciąg sum częściowych był rozbieżny do $\pm\infty$ lub też nie miał nawet granicy niewłaściwej.

Niech będzie dany ciąg $\{\alpha_{n,k}\}_{n,k=0}^{\infty}$ liczb rzeczywistych. Przez zbieżność **szeregu powójnego**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k} \tag{5.40}$$

będziemy rozumieć zbieżnosc szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n, \qquad A_n=\sum_{k=0}\alpha_{n,k}.$$

Jeśli $\alpha_{n,k}\geq 0$, to nietrudno zauważyć, że zbieżność szeregu (5.40) jest równoważna istnieniu stałej $C>0$, takiej że

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K}\alpha_{n,k}\leq C \tag{5.41}$$

dla każdych $N,K\in\mathbf{N}$. Dlatego też fakt zbieżności szeregu podwójnego o wyrazach nieujemnych będziemy oznaczać krótko przez

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}<\infty.$$

W przeciwnym wypadku będziemy pisać

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}=\infty.$$

Warunek (5.41) pociąga równoważność

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}<\infty \iff \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k}<\infty$$

dla $\alpha_{n,k}\geq 0$.

5.42. Uwaga. Niech $\alpha_{n,k}\in\mathbf{R}$. Jeśli

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{n,k}|<\infty,$$

to szereg podwójny $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}$ jest zbieżny. Wystarczy dwukrotnie skorzystać z Wniosku 5.6. Innymi słowy, szereg podwójny bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

5.43. **Lemat.** *Jeśli* $\alpha_{n,k}\geq 0$, *to*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k}.$$

D o w ó d . Niech

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k} = C.$$

Wtedy dla każdych $N, K \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N}\alpha_{n,k} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K}\alpha_{n,k} \le C,$$

więc

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k} \le C.$$

Przez symetrię indeksów uzyskujemy także nierówność przeciwną. □

5.44. **Lemat.** *Jeśli*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{n,k}| < \infty.$$

to oba szeregi podwójne o wyrazie ogólnym $\alpha_{n,k}$ *są zbieżne do tej samej sumy.*

D o w ó d . Zbieżność obu szeregów wynika z Uwagi 5.42. Niech

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k} = A.$$

Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K} - A\right| < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych $N, K \in \mathbf{N}$, a wobec przemienności sum

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K}\alpha_{n,k} = \sum_{k=0}^{K}\sum_{k=0}^{N}\alpha_{n,k}$$

oznacza to, że

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,k} = A = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k},$$

do czego dążyliśmy. □

Ważną klasę szeregów stanowią **szeregi potęgowe**, tzn. szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Przykładami takich szeregów, które już znamy są m.in.:

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, o ile $|x| < 1$;

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \qquad$ dla $x \in \mathbf{R}$;

(3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x, \qquad$ dla $x \in \mathbf{R}$;

(4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x, \qquad$ dla $x \in \mathbf{R}$;

(5) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\, x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad$ o ile $|x| < 1$.

Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny, to możemy określić funkcję

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Jej dziedzina jest zawsze niepusta, gdyż dla $x = 0$ powyższy szereg jest oczywiście zbieżny. Zajmiemy sie teraz dokładniejszym badaniem dziedziny takich funkcji. Dla danego ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ niech

$$\varrho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Wielkość

$$r = \begin{cases} 0, & \varrho = \infty, \\ \infty, & \varrho = 0, \\ 1/\varrho, & \varrho \in (0, \infty). \end{cases}$$

nazywamy **promieniem zbieżności** szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Kolejne twierdzenie wyjaśnia nieco, skąd taka nazwa.

5.45**. Twierdzenie.** *Niech liczba r będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wtedy*

(1) $|x| < r \quad \Rightarrow \quad$ *szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest zbieżny bezwzględnie;*

(2) $|x| > r \quad \Rightarrow \quad$ *szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest rozbieżny.*

D o w ó d. Aby zbadać bezwzględną zbiezność szeregu, skorzystamy z kryterium Cauchy'ego. Otóż, skoro

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{r},$$

o ile $r \in (0, \infty)$, więc jeśli $|x| < r$, to $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$ i szereg jest zbieżny bezwzględnie, jeśli zaś $|x| > r$, to szereg jest rozbieżny. Gdy $r = \infty$, tzn. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, to szereg jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Wreszcie gdy $r = 0$, to dla $x \neq 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \infty$$

i szereg jest rozbieżny. $\square$

Kilka przykładów:

- Dla szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$$
otrzymujemy promień zbieżności $r = 1$. Sprawdźmy jeszcze, co dzieje się dla $|x| = 1$. Otóż mamy
$$\begin{aligned} x = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty; \\ x = -1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty. \end{aligned}$$
Oznacza to, że szereg ten jest zbieżny dla $x \in (-1, 1]$ i rozbieżny poza tym, przy czym wewnątrz przedziału zbieżność jest bezwzględna, a w $x = 1$ warunkowa.

- Rozważmy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, x^n.$$
Skoro
$$\begin{aligned} 1/r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1, \\ |x| = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2}\, x^n\right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \end{aligned}$$
więc szereg ten jest zbieżny (i to bezwzględnie) dla $x \in [-1, 1]$ i rozbieżny poza tym.

- Dla szeregu
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
mamy oczywiście $r = 1$ oraz rozbieżność dla $|x| = 1$.

- Dla szeregu
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
otrzymujemy
$$\varrho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

skąd $r = \infty$, co oznacza, że szereg ten jest zbieżny (bezwzględnie) dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$.

- Dla szeregu
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n\, x^n$$
mamy
$$\varrho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \limsup_{n\to\infty} n = \infty,$$
więc promień zbieżności wynosi $r = 0$, czyli szereg ten jest zbieżny tylko dla $x \in \{0\}$.

- Dla szeregu
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$
mamy
$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \end{cases}$$
czyli
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \end{cases}$$
skąd $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, więc $r = 1$. Oczywiście dla $|x| = 1$ szereg jest rozbieżny.

5.46. **Twierdzenie.** *Jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $r > 0$, to funkcja*
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
jest ciągła w przedziale $(-r, r)$.

Dowód. Niech $x, y \in (-r, r)$. Istnieje taka liczba R, że $|x|, |y| < R < r$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Mamy
$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_0^N a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_0^N a_n y^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n y^n \right| \\ &\leq \left| \sum_0^N a_n x^n - \sum_0^N a_n y^n \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||x|^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||y|^n. \\ &\leq \left| \sum_0^N a_n x^n - \sum_0^N a_n y^n \right| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| R^n. \end{aligned}$$

Drugi składnik powyższej sumy jest podwojoną resztą szeregu zbieżnego, więc

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| R^n < \varepsilon,$$

dla dostatecznie dużych N. Dla każdego N

$$f_N(z) = \sum_0^N a_n z^n$$

jest oczywiście wielomianem, a więc funkcją ciągłą. Wobec tego

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon,$$

jeśli y jest dostatecznie bliskie x. Ostatecznie

$$|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon,$$

jeśli y jest dostatecznie bliskie x przy dostatecznie dużym N, co dowodzi ciągłości funkcji f w przedziale $(-r, r)$. $\square$

A oto twierdzenie o ciągłości szeregu potęgowego na brzegu przedziału.

5.47. **Twierdzenie.** *Niech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *będzie szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności* $r > 0$. *Załóżmy, że szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ *jest zbieżny. Niech*

$$f\colon (-r, r] \ni x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Wtedy f *jest funkcją ciągłą na* $(-r, r]$. *W szczególności*

$$f(r) = \lim_{x \to r-} f(x).$$

Dowód. Oczywiście wobec poprzedniego twierdzenia pozostaje do rozważenia punkt ciągłość w punkcie r. Weźmy więc $x \in (0, r)$. Mamy

$$|f(r) - f(x)| \le \left| \sum_0^N a_n r^n - \sum_0^N a_n x^n \right| + |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n| + |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n|$$

Pierwsze dwa składniki można oszecować jak wyżej. Rzeczywiście drugi przedstawia resztę szeregu z założenia zbieżnego, a pierwszy różnicę wartości wielomianu. Istota sprawy leży w sposobie oszacowania ostatniego składnika. Mamy

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n,$$

gdzie $a_n r^n$ jest wyrazem szeregu (znów z założenia) zbieżnego, a $(\frac{x}{r})^n$ wyrazem ciągu monotonicznie zbieżnego do zera. Na mocy nierówności Abela

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_n| \le \beta_N \left(\frac{x}{r}\right)^{N+1} \le \beta_N,$$

gdzie

$$\beta_N = |\sup_{m>N} a_n r^n| \to 0,$$

gdy $N \to \infty$. To pokazuje, że i trzeci wyraz można uznać za mały przy dostatecznie dużych N. Reszta dowodu jest już powtórzeniem rozumowania z dowodu poprzedniego twierdzenia. □

5.48. **Przykład.** Rozważmy wielomian stopnia nie większego niż N

$$f(x) = \sum_0^N a_n x^n.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_0^N a_n (x+h)^n = \sum_0^N a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \\ &= \sum_{k=0}^N h^k \sum_k^N \binom{n}{k} a_n x^{n-k} = \sum_{k=0}^N \frac{h^k}{k!} \sum_k^N [n]_k \, a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{f_k(x)}{k!} \, h^k, \end{aligned}$$

gdzie

$$[n]_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1), \qquad f_k(x) = \sum_k^N [n]_k \, a_n x^{n-k}.$$

Dla $x + h = y$ otrzymujemy

$$f(y) = \sum_{k=0}^N \frac{f_k(x)}{k!} \, (y-x)^j.$$

5.49. **Twierdzenie.** *Niech będzie dany szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ o dodatnim promieniu zbieżności r. Wtedy dla każdego ustalonego $|x| < r$ i dla $|h| < r - |x|$ funkcja f rozwija się w szereg potęgowy (wokół punktu x) według wzoru*

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f_k(n)}{k!} \, h^k,$$

gdzie $f_k(x) = \sum_{n=0}^\infty [k+n]_k \, a_{k+n} x^n$, $[k+n]_k = (k+n)(k+n-1)\dots(n+1)$.

Dowód. Mamy

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n = \sum_{n=}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} h^k.$$

Skoro

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |a_n||x|^{n-k}|h|^k = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \big(|x| + |h|\big)^n < \infty,$$

bo $|x| + |h| < r$, więc szereg podwójny jest bezwzględnie zbieżny. Możemy zatem zamienić kolejność sumowania, otrzymując

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} h^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} h^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} a_n [n]_k \, x^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} [k+n]_k a_{k+n} x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x)}{k!} \cdot h^k,$$

co kończy dowód. □

6. Różniczkowanie

Niech będzie dana funkcja f określona w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbf{R}$. Mówimy, że f **jest różniczkowalna** w x_0 (ma w x_0 pochodną), jeśli iloraz różnicowy

$$x \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ma w punkcie x_0 granicę. Oznaczamy ją przez $f'(x_0)$ i nazywamy **pochodną funkcji f w punkcie x_0.** Zatem z definicji

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Równoważnie, oznaczając $h = x_0 - x_0$, mamy

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Czasem też oznacza się pochodną inaczej:

$$f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0} = f^{\cdot}(x_0) = Df(x_0).$$

Pierwsze oznaczenie pochodzi od Lagrange'a, drugie od Leibniza, a trzecie od Newtona. Najczęściej będziemy używali dwóch pierwszych.

Wiemy już, że

$$\frac{d}{dx} a^x \bigg|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \log a$$

dla $a > 0$ i $x_0 > 0$ oraz

$$\frac{d}{dx} x^\alpha \bigg|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \alpha x_0^{\alpha - 1}$$

dla $x_0 > 0$ i $\alpha \in \mathbf{R}$. Zatem zarówno funkcja wykładnicza o dowolnej podstawie, jak i funkcja potęgowa, są różniczkowalne w każdym punkcie swojej dziedziny. W szczególności

$$(e^x)' = e^x, \qquad (x)' = 1$$

dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Łatwo również zauważyć, że funkcja stała jest wszędzie różniczkowalna, a jej pochodna jest zawsze równa 0.

6.1**. Przykład.** Rozważmy funkcję zadaną szeregiem potęgowym

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x \in (r, r),$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności tego szeregu. Jak pamiętamy, dla każdego ustalonego $x \in (-r, r)$ i $|h| < r - |x|$,

$$f(x + h) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) h^n,$$

gdzie

$$\alpha_k(x) = \sum_{k=n}^{\infty} [k]_n x^k, \qquad [k]_n = \frac{k!}{n!}.$$

Zatem

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) h^{n-1}$$

i w konsekwencji

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \alpha_1(x),$$

czyli

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Okazuje się zatem, że funkcja zadana szeregiem potęgowym jest różniczkowalna w każdym punkcie otwartego przedziału zbieżności, a jej pochodna wyraża się także szeregiem potęgowym, który, jak łatwo spostrzec, ma ten sam promień zbieżności r. Ponadto jest on zbudowany z pochodnych wyrazów szeregu. Warto zapamiętać regułę, że szereg potęgowy różniczkujemy *wyraz po wyrazie.*

6.2. **Przykład.** Obliczmy pochodną funkcji logarytmicznej w punkcie $x_0 > 0$. Mamy

$$\frac{\log(x_0 + h) - \log x_0}{h} = \frac{\log(1 + \frac{h}{x_0})}{x_0/h} \cdot \frac{1}{x_0}.$$

Jako że

$$\lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1,$$

widzimy, że

$$(\log)'(x_0) = \frac{1}{x_0}.$$

6.3. **Fakt.** *Niech będzie dana funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0. Funkcja f jest różniczkowalna w x_0, wtedy i tylko wtedy gdy istnieją liczba α i funkcja ω określona w otoczeniu* 0*, takie że*

$$f(x+h) = f(x_0) + m \cdot h + \omega(h) \cdot h, \tag{6.4}$$

gdzie $\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0$. *Jeśli tak jest, to*

$$m = f'(x_0).$$

Dowód. Jeśli f jest różniczkowalna, kładziemy

$$\omega(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h}$$

dla dostatecznie małych h. Z definicji pochodnej $\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0$, a prosty rachunek pokazuje, że zachodzi (6.4), jeśli za m przyjąć $f'(x_0)$.

Jeśli zaś spełniony jest warunek (6.4), to widzimy, że

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m + \omega(h),$$

więc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m,$$

co oznacza, że f jest różniczkowalna w x_0 i $f'(x_0) = m$. $\square$

Zauważmy, że warunek (6.4) można wyrazić tak:

$$f(x) = g(x) + \omega(x-x_0)(x-x_0),$$

gdzie $g(x) = m(x-x_0)$ jest funkcją liniową. Zatem (6.4) mówi, że f posiada *aproksymację liniową*, gdyż różnica

$$f(x) - g(x) = \omega(x-x_0)(x-x_0)$$

dąży do 0 szybciej niż czynnik liniowy, gdy $x \to x_0$.

Będziemy mówili, że prosta ukośna

$$y = m(x-x_0) + f(x_0)$$

jest **styczna** do wykresu funkcji f określonej w otoczeniu punktu x_0, jeśli odległość punktu $P_x = (x, f(x))$ leżącego na wykresie funkcji od prostej jest mała w porównaniu z jego odległością od punktu $P_{x_0} = (x_0, f(x_0))$, gdy x dąży do x_0, czyli jeśli

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_xP'_x}{P_xP_{x_0}} = 0,$$

gdzie P'_x jest rzutem prostopadłym P_x na prostą. Mamy

$$P_xP'_x = \frac{|f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)|}{\sqrt{1+m^2}}$$

oraz

$$P_xP_{x_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f(x)-f(x_0)^2}.$$

Zatem prosta $y = m(x-x_0)+f(x_0)$ jest styczna do wykresu funcji f, wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (f(x)-f(x_0))^2}} = 0. \tag{6.5}$$

6.6. **Fakt.** *Prosta $y = m(x-x_0)+f(x_0)$ jest styczna do wykresu funkcji f określonej w otoczeniu punktu x_0, wtedy i tylko wtedy gdy f jest różniczkowalna w x_0 i $f'(x_0) = m$.*

D o w ó d . Dzieląc licznik i mianownik w (6.5) przez $x - x_0$, widzimy, że styczność jest równoważna warunkowi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^2}} = 0. \tag{6.7}$$

Przypuśćmy, że dla pewnego ciągu $x_n \to x_0$

$$\Big(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\Big)^2 \to \infty.$$

Wtedy

$$\frac{|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} - m|}{\sqrt{1+\Big(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\Big)^2}} = \frac{|1 - \frac{m}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}}|}{\sqrt{\frac{1}{\Big(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\Big)^2}+1}} \to 1,$$

więc nie ma mowy o styczności. Widać stąd, że warunkiem równoważnym (6.7) jest

$$\lim_{x\to x_0}\Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m\Big| = 0,$$

a to jest nasza teza. $\square$

6.8. **Fakt.** *Jeżeli funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 jest różniczkowalna w x_0, to jest też ciągła w tym punkcie.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z istnienia aproksymacji liniowej (6.4). $\square$

6.9. **Przykład.** Niech $f(x) = |x|$ i niech $x_0 = 0$. Iloraz różnicowy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|}{x}$$

nie ma granicy, gdy $x \to 0$, więc f nie jest różniczkowalna w tym punkcie. Wykres tej funkcji ma w punkcie $(0,0)$ „ostrze" i nie ma stycznej.

6.10. **Fakt.** *Niech będzie dana funkcja f określona w otoczeniu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie. Jeśli f ma ekstremum lokalne w x_0, to $f'(x_0) = 0$.*

Dowód. Przypuśćmy, że f ma w x_0 maksimum lokalne. Wtedy dla dostatecznie małych $h \neq 0$

$$f(x_0 - h) \leq f(x_0),$$

skąd widać, że lewostronne ilorazy różnicowe będą nieujemne, a prawostronne niedodatnie. Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0.$$

W przypadku minimum lokalnego rozumujemy analogicznie. $\square$

6.11. **Fakt.** *Niech f, g będą funkcja mi określonymi w otoczeniu punktu x_0. Jeżeli obie są różniczkowalne w x_0 , to także funkcje $f+g$ i $f\cdot g$ są różniczkowalne w tym punkcie i*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \qquad (f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Jeżeli ponadto $g(x_0) \neq 0$, to funkcja f/g, która jest dobrze określona w pewnym (być może mniejszym) otoczeniu x_0, jest różniczkowalna w x_0 i

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Dowód. Mamy

$$\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h},$$

skąd po przejściu do granicy otrzymujemy pierwszą część tezy. Mamy też

$$\frac{(f \cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0+h)$$
$$+ f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot,$$

co pociąga drugą część tezy, czyli *wzór Leibniza.*

Trzecią część dotyczącą ilorazu udowodnimy korzystając z drugiej. Mamy

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0),$$

więc wystarczy pokazać, że

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2},$$

a to wynika natychmiast z tożsamości

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g}(x_0+h) - \frac{1}{g}(x_0)\right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)},$$

ciągłości g w x_0 i przejścia granicznego. □

O różniczkowalności funkcji f w punkcie x_0 można mówić tylko wtedy, gdy jest ona określona w pewnym otoczeniu (czyli przedziale otwartym) zawierającym ten punkt. Dlatego sformułowanie *f jest różniczkowalna w x_0* będzie odtąd oznaczać, że f jest określona w otoczeniu x_0 i różniczkowalna w x_0.

6.12**. Twierdzenie.** *Niech g będzie funkcją różniczkowalną x_0, a f różniczkowalną w $y_0 = g(x_0)$. Wtedy funkcja $h = f \circ g$ jest różniczkowalna w x_0 i $h'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$. Innymi słowy,*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Dowód. Jako że g jest różniczkowalna, ma aproksymację liniową

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + \omega_g(h)h,$$

gdzie $\omega_g(h) \to 0$, gdy $h \to 0$. Oznaczmy

$$k = k(h) = g'(x_0)h + \omega_g(h)h.$$

Podobnie różniczkowalność f oznacza, że

$$f(y_0+k)=f(y_0)+f'(y_0)k+\omega_f(k)k,$$

gdzie $\omega_f(k)\to 0$, gdy $k\to 0$.

Zatem

$$\begin{aligned}\frac{f\circ g(x_0+h)-f\circ g(x_0)}{h}&=\frac{f(y_0+k)-f(y_0)}{h}\\&=\frac{f'(y_0)k+\omega_f(k)}{h}=f'(y_0)g'(x_0)+\Omega(h),\end{aligned}$$

gdzie

$$\Omega(h)=\omega_g(h)+\omega_f\big(k(h)\big)\big(g'(x_0)+\omega_g(h)\big)\to 0,$$

gdy $h\to 0$. Przechodząc z h do 0, otrzymujemy tezę. □

6.13. **Twierdzenie.** *Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to(c,d)$ jest wzajemnie jednoznaczna i ma w punkcie $x_0\in(a,b)$ niezerową pochodną, to funkcja odwrotna $g:(c,d)\to(a,b)$ jest różniczkowalna w $y_0=f(x_0)$ i $g'(y_0)=1/f'(x_0)$. Innymi słowy,*

$$(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)},\quad \text{lub}\quad (f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Dowód. Oznaczmy funkcję odwrotną do f przez g. Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}&=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{f(g(y))-f(g(y_0))}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

□

Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x\in(a,b)$, to mówimy, że jest **różniczkowalna w przedziale** (a,b). W ten sposób pojawia się nowa funkcja

$$(a,b)\ni x\mapsto f'(x)\in\mathbf{R},$$

zwana **funkcją pochodną**.

6.14. **Twierdzenie.** *Funkcja pochodna na odcinku otwartym I ma własność Darboux.*

Dowód. Niech

$$f'(a)<A<f'(b)$$

dla pewnych $a<b$ z odcinka I. Należy pokazać, że istnieje punkt $a<c<b$, taki że $f'(c)=A$.

Przypuśćmy na razie, że $A=0$. Skoro $f'(a)<0$ i $f'(b)>0$, to dla pewnych $a<a_1<b_1<b$ jest

$$f(a_1)<f(a),\qquad f(b_1)<f(b),$$

a więc w żadnym z punktów a, b funkcja ciągła f nie przyjmuje swojej najmniejszej wartości na odcinku $[a, b]$. Istnieje więc $c \in (a, b)$, w którym ta najmniejsza wartość jest przyjęta i tam też $f'(c) = 0$.

Jeśli teraz A jest dowolne, stosujemy powyższe rozumowanie do funkcji

$$g(x) = f(x) - Ax,$$

która spełnia

$$g'(a) < 0 < g'(b).$$

Mamy więc $g'(c) = 0$ dla pewnego $a < c < b$, a stąd $f'(c) = A$. □

6.15. **Twierdzenie** (Rolle). *Niech $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, gdzie $a < b$, będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w (a, b). Jeżeli ponadto $f(a) = f(b)$, to istnieje $c \in (a, b)$, takie że $f'(c) = 0$.*

Dowód. Funkcja f jako ciągła na przedziale domkniętym przyjmuje największą i największą wartość. Jeśli obie są przyjęte na końcach przedziału, to wobec $f(a) = f(b)$ funkcja jest stała i nasza teza jest oczywista. W przeciwnym wypadku f ma ekstremum lokalne (i globalne) w $c \in (a, b)$ i w tym punkcie musi być $f'(c) = 0$. □

6.16. **Twierdzenie** (Lagrange). *Niech $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, gdzie $a < b$, będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w (a, b). Wtedy istnieje $c \in (a, b)$, takie że*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Niech

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \qquad x \in [a, b].$$

Jak łatwo zauważyć, funkcja $F = f - g$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, więc $F'(c) = 0$ dla pewnego $c \in (a, b)$, a stąd

$$f'(c) = g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Z twierdzenia Lagrange'a łatwo otrzymać następujące trzy wnioski.

6.17. **Wniosek.** *Jeśli $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ jest różniczkowalna i $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest funkcją stałą.*

6.18. **Wniosek.** *Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a, b) jest rosnąca (malejąca), wtedy i tylko wtedy gdy jej pochodna w tym przedziale jest nieujemna (niedodatnia).*

6.19. **Wniosek.** *Jeżeli funkcja f określona w przedziale (a, b) ma dodatnią (ujemną) pochodną w tym przedziale, to jest ściśle rosnąca (malejąca).*

Niech będzie dana funkcja $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. Funkcję różniczkowalną $F : (a, b) \to \mathbf{R}$, taką że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a, b)$ nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji f. Oczywiście, jeśli F jest pierwotną f, to i $F_c(x) = F(x) + c$ jest pierwotną f, więc funkcja pierwotna (o ile istnieje) nie jest wyznaczona jednoznacznie. Tym niemniej, dwie różne funkcje pierwotne na odcinku mogą się różnić tylko o stałą. Rzeczywiście, jeśli

$$F_1'(x) = f(x) = F_2'(x), \qquad x \in (a, b),$$

to $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, więc na mocy Wniosku 6.17, funkcja $F_1 - F_2$ jest stała.

6.20. **Lemat.** *Funkcja f zadana szeregiem potęgowym*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x \in (r, r),$$

gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności tego szeregu, ma zawsze funkcję pierwotną. Wyraża się ona szeregiem potęgowym

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

o tym samym promieniu zbieżności.

D o w ó d. Najpierw sprawdzamy, że promień zbieżności nowego szeregu jest także równy r, a potem różniczkując wyraz po wyrazie przekonujemy się, że $F' = f$. $\square$

Nie każda jednak funkcja ma pierwotną. Wystarczy przypomnieć sobie, że funkcja pochodna ma zawsze własność Darboux (por. Twierdzenie 6.14). Zatem funkcja nie mająca tej własności, a w szczególności funkcja mająca nieciągłości pierwszego rodzaju, nie może mieć pierwotnej. Później zobaczymy jednak, że każda funkcja *ciągła* ma pierwotną.

6.21. **Przykład.** Korzystając z lematu rozwiniemy funkcję logarytmiczną w szereg potęgowy. Niech

$$g(x) = \log(1 + x), \qquad |x| < 1.$$

Funkcja pochodna rozwija się w szereg geometryczny

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

o promieniu zbieżności $r = 1$, więc

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

dla $|x| < 1$.

Mówimy, że funkcja $g : (a, b) \to \mathbf{R}$ **zmienia znak** z ujemnego na dodatni w punkcie $c \in (a, b)$, jeśli istnieje $h > 0$, takie że $(c - h, c + h) \subset (a, b)$ oraz

$$f(x) \begin{cases} < 0, & c - h < x < c, \\ = 0, & x = c, \\ > 0, & c < x < x + h. \end{cases}$$

Analogicznie definiujemy zmianę znaku z dodatniego na ujemny.

A oto kolejny wniosek z twierdzenia Lagrange'a.

6.22. **Wniosek.** *Niech f będzie różniczkowalna w (a, b). Jeśli pochodna f' zmienia w punkcie x_0 znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na ujemny), to f ma w x_0 ściśle minimum (maksimum) lokalne.*

D o w ó d . Przypuśćmy, że pochodna zmienia znak w x_0 z ujemnego na dodatni. Wtedy dla x dostatecznie bliskich x_0

$$f(x) - f(x_0) = f'(c(x))(x - x_0) > 0,$$

gdzie $c(x)$ leży w odcinku otwartym $\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$, więc x_0 jest punktem ścisłego minimum. Podobnie rozumujemy w przypadku, gdy pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny. $\square$

Twierdzenie Lagrange'a pozwala też na następujące ważne uogólnienie.

6.23. **Twierdzenie** (Cauchy)**.** *Niech $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$, gdzie $a < b$, będą funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi w (a, b). Niech ponadto $g'(x) \neq 0$, $a < x < b$. Wtedy istnieje $c \in (a, b)$, takie że*

$$\frac{f'(c)}{g'c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

D o w ó d . Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $g' > 0$ na $[a, b]$. Niech $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$. Wtedy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f \circ g^{-1}(\beta) - f \circ g^{-1}(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

więc na mocy twierdzenia Lagrange'a

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = (f \circ g^{-1})'(\gamma) = \frac{f'(g^{-1}(\gamma))}{g'(g^{-1}(\gamma))}$$

dla pewnego $\alpha < \gamma < \beta$. Kładąc $c = g^{-1}(\gamma)$, otrzymujemy tezę. $\square$

6.24. U w a g a. Często wygodnie jest punkt pośredni czy to w twierdzeniu Lagrange'a, czy Cauchy'ego, zapisywać w postaci

$$c = a + \theta(b - a),$$

gdzie $\theta \in (0, 1)$. Zauważmy też, że oba wzory obowiązują także dla $b < a$.

6.25. **Przykład.** Niech $f(x) = \sin x$. Stosując twierdzenie Lagrange'a z $a = 0$, $b = x$, otrzymujemy

$$\sin x = x \cos \theta x, \qquad x \in \mathbf{R},$$

dla pewnego $0 < \theta < 1$. Natomiast stosując twierdzenie Cauchy'ego do funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2$ na tym samym przedziale, mamy

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\cos \vartheta x}{2\vartheta x},$$

skąd

$$\sin x = \frac{x \cos \vartheta x}{2\vartheta}$$

dla pewnego $0 < \vartheta < 1$.

Jako wniosek z twierdzenia Cauchy'ego można otrzymać tak bardzo lubiane reguły de l'Hospitala.

6.26. **Wniosek** (de l'Hospital). *Niech będą dane funkcje różniczkowalne*

$$f, g : (a, b) \to \mathbf{R},$$

gdzie $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Załóżmy, że $g'(x) \neq 0$ dla $a < x < b$, a ponadto

$$\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Przy tych założeniach każdy z następujących warunków

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0, \qquad \lim_{x \to b-} g(x) = \infty$$

pociąga

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x} = \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta.$$

6.27. U w a g a. Warunek

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0$$

nazywa się krótko *symbolem* $\frac{0}{0}$ (pierwsza reguła de l'Hospitala), natomiast warunek

$$\lim_{x \to b-} g(x) = \infty$$

symbolem $\frac{\infty}{\infty}$ (druga reguła de l'Hospitala).

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla przypadku $\beta \in \mathbf{R}$ pozostawiając uzupełnienie go Czytelnikowi.

Niech $\epsilon > 0$. Na mocy założenia o istnieniu granicy ilorazu pochodnych i twierdzenia Cauchy'ego istnieje $a < x_0 < b$, takie że dla różnych $x, y > x_0$

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - \beta \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \beta \right| < \epsilon,$$

gdzie $x < c < y$. Stąd

$$\left|\frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}}\right| < \epsilon$$

i po prostych przekształceniach

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - \beta\right| < \epsilon\left|1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right| + \beta\left|\frac{g(x)}{g(y)}\right| + \left|\frac{f(x)}{g(y)}\right|.$$

Jeśli teraz spełnione jest założenie pierwszej regułu de l'Hospitala, to, przechodząc z x do nieskończoności, mamy

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - \beta\right| \leq \epsilon$$

dla $y > x_0$. Jeśli natomiast przyjmiemy założenie drugiej reguły, to dla znajdziemy takie $x_0 < y_0 < b$, że

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - \beta\right| < (3 + \beta)\epsilon$$

dla $y > y_0$. W ten sposób dowód został zakończony. $\square$

Niech $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Może się okazać, że funkcja pochodna f' jest różniczkowalna w jakimś punkcie $x_0 \in (a, b)$. Mówimy wtedy, że funkcja f jest **dwukrotnie różniczkowalna** w x_0, a pochodną $(f')'(x_0)$ nazywamy **drugą pochodną** f w x_0 i oznaczamy przez $f''(x_0)$. Piszemy także

$$f''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)\big|_{x=x_0}.$$

6.28. **Fakt.** *Niech będzie dana funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 i dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie. Wtedy istnieje funkcja Ω określona w otoczeniu 0, taka że*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \Omega(h), \tag{6.29}$$

gdzie

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Omega(h)}{h^2} = 0.$$

Dowód. Mamy

$$\frac{\Omega(h)}{h^2} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2}{h^2},$$

skąd na mocy twierdzenia Cauchy'ego

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Omega(h)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)}{2\theta h} - \frac{1}{2}f''(x_0) = 0.$$

$\square$

6.30. **Fakt.** *Niech będzie dana funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 i dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie. Jeśli istnieją liczby a, b, c, takie że*

$$f(x_0+h) = a + bh + ch^2 + \Omega(h), \tag{6.31}$$

gdzie $\lim_{h\to 0}\frac{\Omega(h)}{h^2} = 0$, *to*

$$a = f(x_0), \qquad b = f'(x_0), \qquad c = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

Dowód. Przechodząc z h do granicy w zerze, widzimy, że $a = f(x_0)$. Podstawiając tę wartość do wzoru i dzieląc przez h, dostajemy

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = b + ch + \frac{\Omega(h)}{h},$$

skąd po przejściu z h do zera mamy $b = f'(x_0)$. Aby obliczyć c, napiszmy

$$c = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h^2} + \frac{\Omega(h)}{h^2}.$$

Stąd na mocy twierdzenia Cauchy'ego

$$\begin{aligned} c &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)h}{2\theta h} = \frac{1}{2}f''(x_0). \end{aligned}$$

□

6.32. **Przykład.** Okazuje się, że istnieją jednak funkcje różniczkowalne spełniające warunek (6.30), lecz nie mające w x_0 drugiej pochodnej. Przykładem takiej funkcji jest

$$\phi(x) = \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Rzeczywiście, $|\phi(x)| \leq |x|^3$ i

$$\phi'(x) = \begin{cases} 3x^2\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ale iloraz różnicowy

$$\frac{\phi'(x)-\phi'(0)}{x} = 3x\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$$

nie ma granicy przy $x\to 0$.

6.33. **Wniosek.** *Jeżeli f jest funkcją określoną w otoczeniu punktu a i dwukrotnie różniczkowalną w a, to warunki*

$$f'(a) = 0, \qquad f''(a) \neq 0$$

pociągają istnienie w a ścisłego ekstremum lokalnego. Jeśli $f'(a) > 0$, jest to minimum. Jeśli zaś $f'(a) > 0$ – maksimum.

Dowód. Rzeczywiście, na mocy Faktu 6.28

$$f(a+h) - f(a) = \left(\frac{1}{2}f''(a) + \frac{\Omega(h)}{h^2}\right)h^2$$

dla małych h, gdzie znak wyrażenia po prawej zależy tylko od $f''(a)$, gdyż

$$\frac{\Omega(h)}{h^2} \to 0, \qquad h \to 0.$$

□

Pochodne wyższych rzędów definiujemy indukcyjnie. Aby można było mówić o **pochodnej rzędu** $n+1$ w punkcie x_0, funkcja f musi być n-krotnie różniczkowalna w *pewnym otoczeniu* x_0. Jeśli funkcja pochodna rzędu n, którą oznaczamy przez $f^{(n)}$, jest różniczkowalna w x_0, to jej pochodną nazywamy pochodną rzędu $n+1$ funkcji f w x_0. Zatem

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0).$$

Pochodną rzędu n nazywamy też krótko n-tą pochodną. Piszemy także

$$f^{(n)}(x_)) = \frac{d^n}{dx^n}f(x)\Big|_{x=x_0}.$$

6.34. **Twierdzenie** (Wzór Taylora-Cauchy'ego)**.** *Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w przedziale (a,b). Wtedy dla każdych $x, y \in (a,b)$*

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k + R_n(x,y),$$

gdzie

$$R_n(x,y) = (1-\vartheta)^{n-1}\frac{f^{(n)}(x+\vartheta(y-x))}{(n-1)!}(y-x)^n$$

dla pewnego $\vartheta = \vartheta(x,y) \in (0,1)$.

D o w ó d. Niech

$$r_n(h) = f(y) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(y-h)}{k!}h^k$$

dla $a < y-h < b$. Jak łatwo zauważyć

$$r_n(0) = 0, \qquad r_n(y-x) = R_n(y-x).$$

Ponadto funkcja r_n jest różniczkowalna i

$$\begin{aligned} r_n'(h) &= -f'(y-h) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(y-h)}{k!}h^k - \frac{f^{(k)}(y-h)}{(k-1)!}h^{k-1}\right) \\ &= \frac{f^{(k)}(y-h)}{(n-1)!}h^{n-1}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Zatem na mocy twierdzenia Lagrange'a

$$\begin{aligned} r_n(h) = r_n'(\theta h)h &= \frac{f^{(k)}(y-\theta h)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}\cdot h \\ &= (1-\vartheta)^{n-1}\frac{f^{(k)}(y-(1-\vartheta)h)}{(n-1)!}h^n \end{aligned}$$

dla pewnego $0 < \theta = 1 - \vartheta < 1$. Podstawiając $h = y - x$, otrzymujemy naszą tezę. □

Przy ustalonym $x = x_0$ wielomian

$$\phi_{n-1}(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(y-x)^k,$$

nazywamy **wielomianem Taylora**, a resztę $R_n(x_0, y)$ – **resztą Taylora** funkcji f.

Modyfikacja poprzedniego dowodu daje nową wersję twierdzenia Taylora.

6.36. **Twierdzenie** (Wzór Taylora-Lagrange'a). *Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w przedziale (a, b). Wtedy dla każdych $x, y \in (a, b)$*

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k + R_n(x,y),$$

gdzie

$$R_n(x,y) = \frac{f^{(n)}(x+\theta(y-x))}{n!}(y-x)^n$$

dla pewnego $\theta = \theta(x, y) \in (0, 1)$.

Dowód. Niech jak poprzednio

$$r_n(h) = f(y) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(y-h)}{k!}h^k$$

dla $a < y - h < b$. Tym razem zastosujemy twierdzenie Cauchy'ego o wspólnym punkcie pośrednim dla ilorazu. Na mocy (6.35) mamy

$$\frac{r_n(h)}{h^n} = \frac{r_n'(\theta h)}{n(\theta h)^{n-1}} = \frac{f^{(k)}(y-\theta h)}{n!}.$$

Po podstawieniu $h = y - x$ otrzymujemy naszą tezę. □

6.37. **Wniosek.** *Niech funkcja f spełnia założenia twierdzenia Taylora. Ustalmy $x_0 \in (a, b)$. Wtedy*

$$\lim_{y\to x_0} \frac{R_n(x_0,y)}{(y-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{6.38}$$

W szczególności istnieje stała $C > 0$, taka że dla y dostatecznie bliskich x_0

$$|R_n(x_0, y)| \leq C|y - x_0|^n. \tag{6.39}$$

Dowód. Rzeczywiście,

$$\frac{R_1(x_0, y)}{y - x_0} = \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_)},$$

więc

$$\lim_{y \to x_0} R_1(x_0, y) = f'(x_0)$$

i nasza teza jest prawdziwa w przypadku $n = 1$. Krok indukcyjny umożliwia następujące spostrzeżenie. Z definicji reszty

$$R_n(x_0, y) = f(y) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(y - x_0)^k$$

widać, że

$$R_n'(x_0, y) = f'(y) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(y - x_0)^k.$$

Zatem pochodna R_n jest resztą stopnia $n - 1$ funkcji pochodnej f'. Jeśli zatem założymy indukcyjnie, że wzór (6.38) jest spełniony dla pewnego $n - 1$ w przypadku funkcji pochodnej, to stosując twierdzenie pierwszą regułę de l'Hospitala, otrzymamy

$$\begin{aligned} \lim_{y \to x_0} \frac{R_n(f, x_0, y)}{(y - x_0)^n} &= \lim_{y \to x_0} \frac{R_{n-1}(f', x_0, y)}{ny^{n-1}} \\ &= \frac{(f')^{(n-1)}(x_0)}{n(n-1)!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \end{aligned} \tag{6.40}$$

a o to właśnie nam chodziło. □

Gdy punkt x_0 jest ustalony, wygodniej jest formułować i zapisywać twierdzenie Taylora w następującej równoważnej postaci.

6.41. **Twierdzenie** (Wzór Taylora). *Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w otoczeniu punktu x_0. Wtedy dla dostatecznie małych h*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R_n(h),$$

gdzie

$$R_n(h) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{n!}h^n = (1 - \vartheta)^{n-1}\frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{(n-1)!}h^n$$

dla pewnych $0 < \theta, \vartheta < 1$. Ponadto

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Czasem można otrzymać rozwinięcie funkcji w sumę częściową szeregu potęgowego, nie wiedząc dokładnie, jak wyglądają jej pochodne. Kolejne twierdzenie umożliwia sprawdzenie, czy dane rozwinięcie jest rzeczywiście rozwinięciem Taylora. Okazuje się, że jedynym istotnym warunkiem jest, by reszta miała własność (6.39).

6.42. **Twierdzenie** (Wzór Taylora-Peano). *Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w przedziale (a, b). Jeśli dla pewnego $x_0 \in (a, b)$ i dostatecznie małych h*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k h^k + r_n(h),$$

gdzie

$$|r_n(h)| \leq C_n h^n$$

dla pewnego $C_n > 0$, to

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad 0 \leq k \leq n - 1.$$

Zatem $r_n(h) = R_n(x_0, x_0 + h)$ jest resztą Taylora.

Dowód. I tym razem będziemy rozumować indukcyjnie. Jeśli $n = 1$ i

$$f(x_0 + h) = c_0 + r_1(h), \qquad |r_1(h)| \leq C_1 |h|,$$

to przechodząc z h do 0, dostajemy $c_0 = f(x_0)$. Załóżmy więc, że teza zachodzi dla pewnego n oraz

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + r_{n+1}(h),$$

gdzie

$$|r_{n+1}(h)| \leq C_{n+1} h^{n+1}$$

dla pewnego $C_{n+1} > 0$. Wtedy

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k h^k + \rho_n(h),$$

gdzie

$$|\rho_n(h)| = |c_n h^n + r_{n+1}(h)| \leq (|c_n| + C_{n+1}|h|)|h|^n,$$

więc na mocy założenia indukcyjnego

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad 0 \leq k \leq n - 1,$$

a $\rho_n(h) = R_n(x_0, x_0 + h)$ jest resztą Taylora. Pozostaje obliczyć wartość c_n. Ale

$$c_n = \frac{\rho_n(h) - r_{n+1}(h)}{h^n},$$

więc

$$c_n = \lim_{h \to 0} \frac{R_n(x_0, x_0 + h)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

na mocy (6.38). □

Rozwinięcie Taylora wokół $x_0 = 0$ nazywa się także rozwinięciem **Maclaurina**.

6.43. **Przykład.** Rozwińmy funkcję *sinus* we wzór Maclaurina. Jako że

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin x\Big|_{x=0} = 0,$$
$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \sin x\Big|_{x=0} = (-1)^n \cos x\Big|_{x=0} = (-1)^n$$

dla $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, rozwinięcie przyjmuje postać

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1}(x),$$

gdzie

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{\cos \theta_n x}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

dla pewnego $\theta_n \in (0,1)$, a więc

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

To pokazuje, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0,$$

czyli

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Przypomnijmy, że

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Podobieństwo tych rozwinięć tłumaczy częściowo podobieństwo nazw obu tych na pierwszy rzut oka bardzo niepodobnych funkcji.

6.44. **Przykład.** Niech $\alpha \in \mathbf{R}$. Rozwińmy funkcję $f(x) = x^\alpha$ we wzór Taylora wokół punktu $x_0 = 1$. Mamy

$$\frac{d^k x^\alpha}{dx^k} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}.$$

Wprowadźmy nowe oznaczenie

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!},$$

które jest oczywistym uogólnieniem znanego nam **symbolu Newtona**. Zatem

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k x^\alpha}{dx^k}\bigg|_{x=1} = \binom{\alpha}{k}$$

i wzór Taylora przyjmuje postać

$$(1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}h^k + R_n(h), \qquad |h|<1,$$

gdzie

$$R_n(h) = \binom{\alpha}{n}(1+\theta_n h)^{\alpha-n}h^n = n(1-\vartheta)^{n-1}\binom{\alpha}{n}(1+\vartheta_n h)^{\alpha-n}h^n$$

dla odpowiednich $0<\theta_n, \vartheta_n<1$. Prawa strona wzoru Taylora, jeśli pominąć resztę, przedstawia sumę częściową szeregu potęgowego Taylora

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}h^k,$$

którego promień zbieżności jest równy 1, a więc zbieżnego dla $|h|<1$. Udowodnimy, że w istocie

$$(1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}h^k, \qquad |h|<1.$$

W tym celu należy wykazać, że dla każdego ustalonego h

$$\lim_{n\to\infty} R_n(h) = 0.$$

Jeśli $0\le h<1$, to

$$(1+\vartheta_n h)^{\alpha-n}\le 1$$

dla $n>\alpha$ oraz

$$(1-\vartheta_n)^{n-1}(1-\vartheta_n h)^{\alpha-n} = \left(\frac{1-\vartheta_n}{1-\vartheta_n h}\right)^{n-1}(1-\vartheta_n h)^{a-1}\le(1-h)^{-1}.$$

Widzimy więc, że dla $-1<h<1$

$$|R_n(h)|\le n\left|\binom{\alpha}{n}\right|(1-|h|)^{-1}|h|^n,$$

a ponieważ

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left|\binom{\alpha}{n}\right||h|^n<\infty,$$

więc $R_n(h)\to 0$.

6.45. **Przykład.** Zastosujmy wzór z poprzedniego przykładu w przypadku $\alpha=\frac{1}{2}$. Mamy

$$\sqrt{1+h} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}h^k, \qquad |h|<1,$$

gdzie

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot 2k}.$$

Biorąc $\alpha = -\frac{1}{2}$ i $h = -x^2$, otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k x^{2k},$$

gdzie

$$(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2k}.$$

Wobec tego

$$(\arcsin x)' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2k}x^{2k},$$

a stąd

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2k}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

dla $|x| < 1$. W szczególności pamiętając, że $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, mamy

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2k}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)}.$$

I jeszcze jeden przykład.

6.46. **Przykład.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

Nie ma wątpliwości, że nasza funkcja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna poza zerem. Aby zbadać jej różniczkowalność w punkcie $x = 0$, sprawdźmy najpierw przez indukcję, że dla każdego $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$ i każdego $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}, \tag{6.47}$$

gdzie p_n jest pewnym wielomianem. Rzeczywiście, dla $n = 0$, $p_0(x) = 1$. Natomiast

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{p_n'(x)x^{3n} - 3nx^{3n-1}p_n(x)}{x^{6n}} - \frac{p_n}{x^{3n}}\cdot\frac{2}{x^3}\right)e^{-1/x^2}\\ &= \frac{p_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$p_{n+1}(x) = x^3p_n'(x) + (3nx^2+2)p_n(x).$$

Ze wzoru (6.47) i nierówności

$$e^{-1/x^2} \leq N!x^{2N}$$

prawdziwej dla każdego $N \in \mathbf{N}$ wynika, że

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

dla każdego $n \in \mathbf{N}$, a stąd przez indukcję, że f ma wszystkie pochodne w zerze i

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Wobec tego rozwinięcie Taylora funkcji f wokół zera przyjmuje dla dowolnego n postać

$$f(h) = R_n(h).$$

Widać też, że funkcja f nie rozwija się w szereg Taylora, bo to oznaczałoby, że jest funkcją zerową, a tak oczywiście nie jest.

Mówimy, że funkcja f określona na przedziale $I \subset \mathbf{R}$ jest **wypukła**, jeśli dla każdych $x, y \in I$ i każdego $0 < \lambda < 1$

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \le \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x). \tag{6.48}$$

Aby lepiej zrozumieć tę definicję, zauważmy, że sieczna wykresu funkcji f przechodząca przez punkty $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ jest wykresem funkcji liniowej

$$g_{x,y}(t) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x) + f(x) = \frac{t-x}{y-x} f(y) + \left(1 - \frac{t-x}{y-x}\right) f(x),$$

a każdy punkt $t \in (x, y)$ można zapisać jako

$$t = \frac{t-x}{y-x} y + \left(1 - \frac{t-x}{y-x}\right) x = \lambda_t y + (1-\lambda_t)x.$$

Wstawiając tę właśnie wartość $\lambda = \lambda_t$ do (6.48), widzimy, że wypukłość f jest równoważna warunkowi

$$f(t) < g_{x,y}(t), \qquad t \in (x,y), \quad x, y \in I.$$

Zatem funkcja f jest wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych $x, y \in I$ wykres funkcji na odcinku $[x, y]$ leży nie wyżej niż sieczna wykresu w punktach o odciętych x, y.

6.49. **Lemat.** *Jeżeli funkcja ciągła $f : I \to \mathbf{R}$ spełnia warunek*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad x, y \in I,$$

to jest wypukła.

Dowód. Niech $a < b$ będą punktami odcinka I. Przypuśćmy nie wprost, że dla pewnego $a < t_0 < b$ zachodzi $f(t_0) > g(t_0)$, gdzie $g = g_{a,b}$ jest funkcją liniową, której wykres jest sieczną wykresu f. Niech (x, y) będzie maksymalnym przedziałem zawierającym t, takim że $f(t) > g(t)$ dla $t \in (x, y)$. Taki przedział istnieje, bo $f - g$ jest funkcją ciągłą. Oczywiście $(x, y) \subset (a, b)$ i $f(x) = g(x)$ oraz $f(y) = g(y)$. Zatem $g(t) = g_{x,y}(t)$ i wobec tego na mocy naszego założenia $f(t_1) \le g(t_1)$ dla $t_1 = \frac{x+y}{2}$, co stoi w sprzeczności z definicją punktów x, y. $\square$

6.50. **Twierdzenie.** *Funkcja $f : I \to \mathbf{R}$ jest wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $c \in I$ iloraz różnicowy*

$$\phi_c(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \qquad x \in I \setminus c,$$

jest funkcją rosnącą.

Dowód. Przypuśćmy, że f jest wypukła i $x < y < c$. Wtedy dla pewnego $t \in (0,1)$ mamy $y = (1-t)x + tc$, więc $f(y) \le (1-t)f(x) + tf(c)$, a stąd

$$\phi_c(y) = \frac{f(y) - f(c)}{y - c} \le \frac{f(x) - f(c)}{x - c} =\ge \phi_c(x).$$

Jeśli natomiast $c < x < y$, to $x = tc + (1-t)y$ dla pewnego $t \in (0,1)$, więc $f(x) \le tf(c) + (1-t)f(y)$, skąd

$$\phi_c(x) = \frac{f(y) - f(c)}{y - c} \le \frac{f(y) - f(c)}{y - c} = \phi_c y).$$

Wreszcie, korzystając z poprzednich ustaleń, dla $x < c < y$ mamy

$$\phi_c(x) = \phi_x(c) \le \phi_x(y) = \phi_y(x) \le \phi_y(c) = \phi_c(y),$$

co kończy pierwszą część dowodu.

Załóżmy teraz, że ilorazy różnicowe funkcji f są rosnące. Jeśli $x \neq y$ i $c = tx + (1-t)y$, gdzie i $t \in (0,1)$, to

$$\begin{aligned} f(c) &= (c-x)\phi_x(c) + f(x) \le (c-x)\phi_x(y) + f(x) \\ &= \frac{c-x}{y-x} f(y) + \left(1 - \frac{c-x}{y-x}\right) f(x) = tf(x) + (1-t)f(x), \end{aligned}$$

więc funkcja jest wypukła. □

6.51. **Wniosek.** *Funkcja wypukła w przedziale otwartym (a,b) jest ciągła. Ponadto jest lipschitzowska na każdym domkniętym przedziale $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$.*

Dowód. Niech $\alpha \le x < y \le \beta$. Na mocy Twierdzenia 6.50

$$f(y) - f(x) \le \frac{f(b) - f(\beta)}{b - \beta}(y - x) \le C_1(y - x).$$

gdzie $C_1 = |\frac{f(b) - f(\beta)}{b - \beta}|$, oraz

$$f(y) - f(x) \ge \frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a}(y - x) \ge -C_2(y - x),$$

gdzie $C_2 = |\frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a}|$. Niech $C = \max\{C_1, C_2\}$. Wtedy

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|,$$

a więc f jest lipschitzowska na odcinku $[\alpha, \beta]$.

Przedział $I = (a,b)$ jest sumą zawartych w nim przedziałów domkniętych, w których funkcja jest ciągła. Zatem f jest ciągła w I. □

6.52. **Przykład.** Nie można twierdzić, że funkcja wypukła jest lipschitzowska na przedziale domkniętym. Przykładem ciągłej funkcji wypukłej na $[0, 1]$, która nie jest lipschitzowska jest $x \mapsto -\sqrt{x}$.

W przypadku funkcji różniczkowalnych i dwukrotnie różniczkowalnych wypukłość można opisać bardzo przejrzyście.

6.53. **Twierdzenie.** *Różniczkowalna funkcja $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ jest wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy pochodna $f' : (a, b) \to \mathbf{R}$ jest funkcją rosnącą.*

Dowód. Niech f będzie wypukła i niech $a < x < y < b$. Wtedy dla dowolnych $x < t < s < y$

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \leq \frac{f(y) - f(s)}{y - s},$$

więc przechodząc do granicy z $t \to x$ i $s \to y$, otrzymujemy

$$f'(x) \leq f'(y).$$

Funkcja f' jest zatem rosnąca.

Przypuśćmy teraz, że f' jest rosnąca. Dla $a < x < t < y < b$ mamy

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(y) - f(t)}{y - t},$$

gdzie $c_1 \in (x, t)$, a $c_2 \in (t, y)$, więc $c_1 < c_2$. Skorzystaliśmy z dwukrotonie z twierdzenia Lagrange'a i z monotoniczności f' dla argumentów c_1 i c_2. Otrzymany warunek jest już równoważny wypukłości. □

6.54. **Wniosek.** *Funkcja dwukrotnie rożniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ jest wypukła, wtedy i tylko wtedy gdy $f'' : (a, b) \to \mathbf{R}$ jest funkcją nieujemną.*

Dowód. Warunek $f'' \geq 0$ jest równoważny temu, że f' jest funkcją rosnącą, więc można skorzystać z udowodnionego przed chwilą twierdzenia. □

Mówimy, że funkcja f określona na przedziale $I \subset \mathbf{R}$ jest **ściśle wypukła**, jeśli dla każdych $x \neq y$ z przedziału I i każdego $0 < \lambda < 1$

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)x) < \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x). \tag{6.55}$$

6.56. **Twierdzenie.** *Różniczkowalna funkcja $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ jest ściśle wypukła, jeśli jej pochodna $f' : (a, b) \to \mathbf{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą.*

6.57. **Wniosek.** *Funkcja dwukrotnie rożniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ jest ściśle wypukła, jeśli jej druga pochodna $f'' : (a, b) \to \mathbf{R}$ jest funkcją dodatnią.*

Dowody tych dwóch wniosków są tak podobne do analogicznych wnuiosków dla funkcji wypukłych, że pozostawimy je Czytelnikowi do samodzielnego uzupełnienia.

Mówimy, że funkcja $f : I \to \mathbf{R}$ jest **(ściśle) wklęsła**, jeżeli funkcja $-f$ jest (ściśle) wypukła.

Niech $f : (a,b) \to \mathbf{R}$. Jeśli punkt $c \in (a,b)$ ma tę własnośc, że dla pewnego dostatecznie małego $\epsilon > 0$ funkcja f jest ściśle wypukła na przedziele $(c-\epsilon, c)$ i ściśle wklęsła na przedziale $(c, c+\epsilon)$ lub też na odwrót, to punkt c nazywa się **punktem przegięcia** funkcji f. Zwróćmy uwagę, że przy takiej definicji punkt przegięcia nie musi być punktem ciągłości funkcji.

6.58. Uwaga. Z definicji wynika natychmiast, że jeśli druga pochodna dwukrotnie różniczkowalnej funkcji f zmienia znak w punkcie c, to jest on punktem przegięcia.

6.59. **Fakt.** *Niech $n \geq 2$. Niech będzie dana funkcja f różniczkowalna $n+1$ razy w otoczeniu punktu c. Załóżmy, że*

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{n-1}(c) = 0$$

oraz

$$f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Jeżeli n jest parzyste, to punkt c jest punktem ścisłego ekstremum lokalnego, a jeśli nieparzyste – punktem przegięcia.

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że n jest parzyste i rozwińmy we wzór Taylora pochodną f' wokół punktu c. Mamy

$$f'(c+h) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^{n-1} + r_n(h) = \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^{n-1}}\right)h^{n-1},$$

gdzie

$$|r_n(h)| \leq C_n|h|^n.$$

Widać więc, że wobec nieparzystości $n-1$ pochodna f' zmienia znak w punkcie c, co dowodzi, że c jest punktem ścisłego ekstremum.

Jeśli natomiast n jest nieparzyste, to rozwijamy drugą pochodną we wzór Taylora wokół c i widzimy, że

$$f''(c+h) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^{n-2} + r_{n-1}(h) = \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + \frac{r_{n-1}(h)}{h^{n-1}}\right)h^{n-2},$$

gdzie

$$|r_{n-1}(h)| \leq C_{n-1}|h|^{n-1},$$

więc teraz wobec nieparzystości $n-2$ druga pochodna zmienia znak w c. Zatem c jest punktem przegięcia. $\square$

7. Całkowanie

Zacznijmy[2] od twierdzenia, które pogłębi naszą znajomość funkcji ciągłych. Dotyczy ono pojęcia jednostajnej ciągłości. Funkcję $f : I \to \mathbf{R}$ nazywamy **jednostajnie ciągłą**, jeśli dla dowolnych ciągów $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset I$, takich że $x_n - y_n \to 0$, jest

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Zauważmy najpierw, że jeśli jeden z naszych ciągów jest stały, a więc gdy np. $y_n = x_0$, powyższy warunek oznacza po prostu ciągłość w punkcie x_0. Tak więc, funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła. Z kolei funkcja

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in (0, 1),$$

jest przykładem funkcji ciągłej, ale nie jednostajnie ciągłej. Rzeczywiście, kładąc $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$, mamy

$$x_n - y_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \text{i} \quad f(x_n) - f(y_n) = -1,$$

a więc $f(x_n) - f(y_n)$ nie zmierza do zera, choć $x_n - y_n$ tak. Jednostajna ciągłość to zatem coś więcej niż ciągłość.

7.1. Uwaga. Każda funkcja lipschitzowska $f : I \to \mathbf{R}$ jest jednostajnie ciągła, co wynika wprost z oszacowania

$$|f(x_n) - f(y_n)| \le C|x_n - y_n|, \qquad x_n, y_n \in I.$$

Definicję jednostajnej ciągłości możemy też sformułować za pomocą kwantyfikatorów w duchu Cauchy'ego. Mianowicie, funkcja $f : I \to \mathbf{R}$ jest jednostajnie ciągła, wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in I \quad \Big(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Big).$$

A oto zapowiedziane twierdzenie.

7.2**. Twierdzenie.** *Funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ nie jest jednostajnie ciągła. Istnieje wtedy $\varepsilon > 0$ i istnieją ciągi o wyrazach $x_n, y_n \in [a, b]$, takie że

$$x_n - y_n \to 0, \quad \text{ale} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon.$$

Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa z ciągu $\{y_n\}$ możemy wybrać podciąg $\{y_{n_k}\}$ zbieżny do pewnego $x_0 \in [a, b]$. Oczywiście wtedy także $x_{n_k} \to x_0$, więc

[2]Dziękuję Panu Tomaszowi Stachowiakowi za uważne przeczytanie tego rozdziału i cenne uwagi.

wobec ciągłości f

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0), \qquad f(y_{n_k}) \to f(x_0),$$

a to przeczy naszemu założeniu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$. $\square$

Podziałem odcinka $[a,b] \subset \mathbf{R}$ nazywamy każdy skończony zbiór $P \subset [a,b]$ zawierający oba końce odcinka. Niech

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

będą punktami podziału P. Odcinki

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \qquad 1 \leq k \leq n,$$

będziemy nazywali **odcinkami podziału** P. Jeśli $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jest funkcją ograniczoną, a P podziałem $[a,b]$, to liczby

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f \cdot |I_k|, \qquad \underline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} f \cdot |I_k|,$$

gdzie $|I_k|$ oznacza długość k-tego odcinka podziału P, nazywamy odpowiednio **górna** i **dolną sumą całkową** funkcji f.

7.3. **Lemat.** *Jeśli $P \subset Q$ są podziałami odcinka $[a,b]$, a f jest funkcją ograniczoną na $[a,b]$, to*

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P).$$

D o w ó d. Nierówność środkowa jest oczywista, a nierówności skrajnych dowodzi się podobnie. Dowiedziemy, że $\overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P)$. Przez łatwą indukcję dowód sprowadza się do przypadku, gdy Q zawiera tylko o jeden punkt więcej niż P. Niech więc $P = \{x_j\}_{j=0}^n$, $Q = P \cup \{c\}$ i $x_{k-1} < c < x_k$ dla pewnego $1 \leq k \leq n$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) &= \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j\neq k} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) + \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x)(x_k - x_{k-1}) \\
&\geq \sum_{j\neq k} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) + \sup_{[x_{k-1},c]} f(x)(c - x_{k-1}) + \sup_{[c,x_k]} f(x)(x_k - c) \\
&= \overline{S}(f,Q),
\end{aligned}$$

co było do okazania. $\square$

7.4. **Wniosek.** *Jeśli P i Q są podziałami odcinka $[a,b]$, a f jest funkcją ograniczoną na $[a,b]$, to*

$$\underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P).$$

D o w ó d . Rzeczywiście,

$$\underline{S}(f,Q) \le \underline{S}(f,Q\cup P) \le \overline{S}(f,Q\cup P) \le \overline{S}(f,P)$$

na mocy lematu. $\square$

Niech $\mathcal{P}$ oznacza rodzinę wszystkich podziałów odcinka $[a,b]$. Skoro każda całkowa suma dolna danej funkcji ograniczonej jest nie większa od każdej sumy górnej, zbiór wszystkich dolnych sum całkowych jest ograniczony od góry, a zbiór wszystkich sum górnych ograniczony od dołu.

Liczby

$$\overline{\int} f = \inf_{P\in\mathcal{P}} \overline{S}(f,P), \qquad \underline{\int} f = \sup_{P\in\mathcal{P}} \underline{S}(f,P)$$

nazywamy odpowiednio **górną** i **dolną całką Darboux** funkcji f. Oczywiście

$$\underline{\int} f \le \overline{\int} f.$$

Ograniczoną funkcję $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ nazywamy **całkowalną** w sensie Riemanna, jeśli jej całki Darboux są równe. Ich wspólną wartość nazywamy wtedy **całką Riemanna** z funkcji f i piszemy

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \underline{\int} f = \overline{\int} f.$$

Rodzinę funkcji całkowalnych na odcinku $[a,b]$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{R}([a,b])$.

Zauważmy, że

$$\Omega(f,P) = \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_k \sup_{x,y\in I_k} (f(x)-f(y))|I_k|,$$

gdzie I_k są odcinkami wyznaczonymi przez podział P.

Z definicji całkowalności funkcji wynika łatwo

7.5. **Fakt.** *Funkcja ograniczona $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ jest całkowalna, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje podział P odcinka $[a,b]$, taki że*

$$\Omega(f,P) < \varepsilon.$$

7.6. **Fakt.** *Jeśli $f\in\mathcal{R}([a,b])$, to $f\in\mathcal{R}([c,d])$ dla każdego $[c,d]\subset[a,b]$. Z drugiej strony, jeśli $f\in\mathcal{R}([a,c])$ i $f\in\mathcal{R}([c,d])$, to $f\in\mathcal{R}([a,b]$.*

D o w ó d . Niech P będzie podziałem odcinka $[a,b]$. Niech

$$P' = (P\cap[c,d])\cup\{c,d\}.$$

Zbiór P' jest podziałem $[c,d]$ i łatwo zauważyć, że

$$\Omega_{[c,d]}(f,P') \le \Omega_{[a,b]}(f,P),$$

skąd natychmiast wynika pierwsza część tezy.

Jeśli natomiast P_1 i P_2 są odpowiednio podziałami $[a,c]$ i $[c,b]$, to $P = P_1 \cup P_2$ jest podziałem $[a,b]$ i

$$\Omega_{[a,b]}(f,P) \leq \Omega_{[a,c]}(f,P_1) + \Omega_{[c,d]}(f,P_2).$$

Stąd już wynika druga część tezy. $\square$

Średnicą podziału $P = \{x_j\}_{j=0}^n$ nazywamy liczbę

$$\delta(P) = \max_{1\leq j\leq n} |x_j - x_{j-1}|.$$

7.7. **Twierdzenie.** *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna.*

D o w ó d. Niech $\varepsilon > 0$. Funkcja f jest jednostajnie ciągła, więc istnieje $\delta > 0$, taka że

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad |x-y| < \delta.$$

Niech P będzie podziałem odcinka $[a,b]$ o średnicy mniejszej niż δ. Niech $\{I_j\}_{j=0}^{n-1}$ będą odcinkami podziału. Wtedy

$$\begin{aligned} \Omega(f,P) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{I_j}(f(x) - f(y))|I_j| \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=0}^{n-1} |I_j| = \varepsilon, \end{aligned}$$

co dowodzi naszej tezy. $\square$

7.8. **Przykład.** Rozpatrzmy bardzo prosty lecz ważny przykład. Niech $f(x) = 1$ na odcinku $[a,b]$. Wtedy dla każdego podziału P

$$\underline{S}(f,P) = \overline{S}(f,P) = b-a,$$

więc f jest całkowalna i $\int_a^b f = b-a$.

7.9. **Lemat.** *Jeśli f, g są ograniczonymi funkcjami na $[a,b]$, a $\lambda \in \mathbf{R}$, to*

$$\overline{\int} f+g \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g, \qquad \underline{\int} f+g \geq \underline{\int} f + \underline{\int} g,$$

$$\overline{\int} \lambda f = \lambda \overline{\int} f, \qquad \underline{\int} \lambda f = \lambda \underline{\int} f, \qquad \overline{\int} -f = -\underline{\int} f.$$

Stąd natychmiast wynika

7.10. **Lemat.** *Jeśli f, g są całkowalnymi funkcjami na $[a,b]$, a $\lambda \geq 0$, to*

$$\int f + \lambda g = \int f + \lambda \int g.$$

7.11. **Lemat.** *Jeśli* $f \in \mathcal{R}([a,b])$, *to* $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$.

D o w ó d . Rzeczywiście, dla każdego Podziału P

$$\Omega(|f|, P) \le \Omega(f, P),$$

co wynika z nierówności trójkąta. Zatem całkowalność f pociąga całkowalność $|f|$.
□

7.12. **Fakt.** *Jeśli* $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ *i* $f \le g$, *to* $\int f \le \int g$. *W szczególności, jeśli* $f \ge 0$, *to* $\int f \ge 0$.

7.13. **Fakt.** *Jeśli* $f \in \mathcal{R}([a,b])$, *to* $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$.

D o w ó d . Mamy $f \le |f|$ i $-f \le |f|$, więc na mocy poprzedniego Faktu $\int f \le \int |f|$ oraz $-\int f \le \int |f|$. Stąd $|\int f| \le \int |f|$. □

Dla ograniczonej funkcji $f : I \to \mathbf{R}$ wprowadźmy oznaczenie

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

7.14. **Lemat.** *Dla dowolnych podziałów* P *i* Q *odcinka* $[a,b]$ *i ograniczonej funkcji* f *na tym przedziale zachodzi nierówność*

$$\overline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, P \cup Q) + 2\|f\|(|Q| - 2)\delta(P),$$

gdzie $|Q|$ *oznacza liczbę elementów* Q.

D o w ó d . Lematu dowodzi się łatwo przez indukcję ze względu na liczebność podziału Q. □

7.15. **Twierdzenie.** *Niech* $f \in \mathcal{R}([a,b])$. *Jeśli* $\{P_n\}$ *jest ciągiem podziałów odcinka* $[a,b]$, *takim że* $\lim_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0$, *to*

$$\overline{S}(f, P_n) \to \int_{[a,b]} f, \qquad \underline{S}(f, P_n) \to \int_{[a,b]} f.$$

D o w ó d . Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje podział Q odcinka $[a,b]$, taki że

$$\overline{S}(f, Q) < \int_{[a,b]} f + \varepsilon.$$

Niech N będzie tak duże, aby dla $n \ge N$ było

$$\delta(P_n) < \frac{\varepsilon}{2\|f\||Q|}.$$

Na mocy Lematu 7.14

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P_n) &\le \overline{S}(f,P_n\cup Q)+2\|f\||Q|\delta(P_n)\\ &< \int_{[a,b]} f+2\varepsilon,\end{aligned}$$

co dowodzi pierwszej równości granicznej. Z niej wynika już druga. Rzeczywiście,

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}-\overline{S}(-f,P_n)=-\int_{[a,b]}(-f)=\int_{[a,b]}f,$$

co kończy dowód. □

Niech będzie dana funkcja ograniczona $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ i podział $P=\{x_j\}_{j=0}^k$ tego odcinka. Niech

$$\mathbf{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_k),\qquad c_j\in[x_{j-1},x_j].$$

Wtedy sumę

$$S(f,P,\mathbf{c})=\sum_{j=1}^k f(c_j)(x_j-x_{j-1})$$

nazywamy **sumą riemannowską** funkcji f wyznaczoną przez podział P i ciąg punktów pośrednich $\mathbf{c}$.

7.16. **Wniosek.** *Niech $f\in\mathcal{R}([a,b])$.Jeśli P_n jest ciągiem podziałów o średnicach zbieżnych do zera, to sumy riemannowskie $S(f,P_n,\mathbf{c_n})$ dążą do całki z funkcji f.*

D o w ó d. Łatwo zauważyć, że dla każdego n

$$\underline{S}(f,P_n)\le S(f,P_n,\mathbf{c_n})\le\overline{S}(f,P_n),$$

więc wystarczy zastosować poprzedni lemat i twierdzenie o trzech ciągach. □

7.17. **Przykład.** Scałkujmy funkcję *cosinus* na odcinku $[0,a]$. Funkcja ta jako ciągła jest całkowalna, więc można to zrobić za pomocą sum riemannowskich. Niech

$$P_n=\left\{\frac{ka}{n}\right\}_{k=0}^n.$$

Wybierając $c_k=\frac{(k-1)a}{n}$ i kładąc $\mathbf{c_n}=(c_k)_k$, mamy

$$\begin{aligned}S_n=S(\cos,P_n,\mathbf{c_n})&=\sum_{k=1}^n\frac{a}{n}\cos(k-1)\cdot\frac{a}{n}\\ &=\frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\frac{a}{n}=\frac{a}{n}\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{(n-1)a}{2n}}{\sin\frac{a}{2n}},\end{aligned}$$

skąd, jak łatwo widać,

$$\int_0^a\cos x\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n=2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=\sin a.$$

7.18. **Przykład.** Obliczmy całkę $\int_0^a x^p dx$ dla $p > 0$. Funkcja jest ciągła, więc całkowalna. Jak wyżej, posłużymy się sumami Riemanna. Niech P_n i $\mathbf{c_n}$ będą jak w poprzednim przykładzie. Wtedy

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{k}{n}a\right)^p = \frac{a^{p+1}}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p = a^{p+1}\cdot\frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}}.$$

Aby znaleźć granicę ciągu

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}}$$

skorzystamy z twierdzenia Stolza. Ciąg $\{b_n\}$ jest oczywiście ściśle monotonicznie rozbieżny do nieskończoności, a ponadto

$$\frac{a'_n}{b'_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = (1+\frac{1}{n})^p \cdot \frac{1/n}{(1+\frac{1}{n})^{p+1} - 1}.$$

Jako że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{p+1} - 1}{1/n} = \frac{d}{dx}x^{p+1}\Big|_{x=1} = p+1,$$

widzimy że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{p+1}$$

i ostatecznie

$$\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}.$$

Dla $a > b$ oznaczmy

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbf{R}$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Nie tylko funkcje ciągłe są całkowalne.

7.19. **Fakt.** *Każda funkcja monotoniczna na przedziale $[a, b]$ jest całkowalna.*

D o w ó d . Niech f będzie monotoniczna i niestała. Wtedy $f(a) \neq f(b)$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech P będzie podziałem odcinka $[a, b]$ o średnicy

$$\delta(P) < \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|}.$$

Mamy wówczas

$$\Omega(f, P) \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|(x_k - x_{k-1}) \leq \delta(P)|f(b) - f(a)| = \varepsilon,$$

co pociąga naszą tezę. $\square$

7.20. **Przykład.** Niech f będzie funkcją na $[0,1]$ zdefiniowaną tak:

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

gdzie a_n jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do a. Funkcja f jest nieciągła w nieskończonej ilości punktów, ale jest monotoniczna, więc całkowalna.

O innych nieciągłych funkcjach całkowalnych mówi kolejne twierdzenie.

7.21. **Twierdzenie.** *Jeśli ograniczona funkcja f na przedziale domkniętym ma skończenie wiele punktów nieciągłości, to jest całkowalna.*

D o w ó d . Załóżmy, że $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jest taką funkcją. Niech

$$a \le c_1 < c_2 < \cdots < c_p \le b$$

będą jej punktami nieciągłości. Niech $\varepsilon > 0$. Wybierzmy rozłączne odcinki I_k, tak aby $c_k \in I_k$ i odcinki dopełniające J_k. Załóżmy ponadto, że

$$\sum_k |I_k| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|}.$$

Zauważmy, że na każdym z odcinków J_k nasza funkcja jest całkowalna, bo jest ciągła. Zatem dla każdego k istnieje rozbicie $J_k = \cup J_{kl}$ na rozłączne odcinki domknięte, takie że

$$\sum_{J_{kl}} \sup_{x,y \in J_{kl}} (f(x) - f(y)) < \frac{\varepsilon |J_{kl}|}{2(b-a)}.$$

Rodzina odcinków $\{I_k\}_k \cup \{I_{kl}\}_{kl}$ definiuje podział P odcinka $[a,b]$. Dla tego podziału

$$\Omega(f,P) = \sum_k \Big(\sup_{x,y \in I_k} (f(x) - f(y)) \Big) + \sum_l \Big(\sup_{x,y \in J_{kl}} (f(x) - f(y)) \Big) < \varepsilon,$$

co wynika z definicji podziału P. Zatem f jest całkowalna. $\square$

Przechodzimy do badania całki jako funkcji górnej granicy całkowania.

7.22. **Lemat.** *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i $c \in [a,b]$, to funkcja*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

jest lipschitzowska.

D o w ó d . Niech x, y będą punktami odcinka $[a,b]$. Wtedy

$$F(x) - F(y) = \int_c^x f(t)dt - \int_c^y f(t)dt = \int_x^y f(t)dt,$$

więc

$$|F(x) - F(y)| \le |\int_x^y |f(t)|dt| \le M|x-y|,$$

gdzie $M = \|f\|$. $\square$

7.23. Lemat. *Jeśli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i $c \in [a,b]$, to funkcja*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

jest różniczkowalna w każdym punkcie x_0 ciągłości f. Ponadto

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

D o w ó d. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest ciągła w x_0, więc istnieje $\delta > 0$, taka że $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, o ile $|x - x_0| < \delta$. Mamy zatem

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(t) - f(x_0)\Big)\, dt,$$

a wobec

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt\right| \le \varepsilon\frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} dt\right| = \varepsilon$$

dla $|h| < \delta$, co kończy dowód. $\square$

Z poprzednich dwóch lematów wynika natychmiast *podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.*

7.24. Twierdzenie. *Jeśli $f \in C([a,b])$, to funkcja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

jest różniczkowalna w przedziale (a,b) oraz

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \qquad x \in (a,b).$$

Zatem F jest pierwotną f w (a,b).

Można udowodnić trochę więcej.

7.25. Wniosek. *Jeśli $f \in C([a,b])$, to istnieje funkcja różniczkowalna $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, taka że $G'(x) = f(x)$ dla $x \in [a,b]$.*

D o w ó d. Funkcję f można rozszerzyć do funkcji g ciągłej na całej prostej, kładąc

$$g(x) = \begin{cases} g(a), & x < a, \\ f(x), & x \in [a,b], \\ f(b), & x > b. \end{cases}$$

Niech
$$G(x) = \int_a^x g(t)dt, \qquad x \in \mathbf{R}.$$
Na mocy twierdzenia funkcja G jest różniczkowalna na całej prostej i $G'(x) = g(x)$ dla $x \in \mathbf{R}$. W szczególności
$$G'(x) = f(x), \qquad x \in [a,b].$$

7.26. **Wniosek.** *Jeśli* $f \in C([a,b])$, $F \in C([a,b])$ *oraz* $F'(x) = f(x)$ *dla* $x \in (a,b)$, *to*
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

D o w ó d. Niech
$$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b].$$
Wtedy $(F - F_0)' = 0$ na (a,b), więc $F - F_0 = c$ na (a,b), a przez ciągłość także na końcach przedziału. Stąd
$$\int_a^b f(t)dt = F_0(b) - F_0(a) = (F_0(b) + c) - (F_0(a) + c) = F(b) - F(a),$$
tak jak chcieliśmy. $\square$

7.27. **Przykład.** a) Mamy $(\sin x)' = \cos x$, więc
$$\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a.$$
b) Mamy $(x^{p+1})' = (p+1)x^p$, więc
$$\int_a^b x^p dx = \frac{1}{p+1}(b^{p+1} - a^{p+1}), \qquad a,b > 0,\ \ p \neq -1.$$
c) Niech
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < r,$$
gdzie $r > 0$ jest promieniem zbieżności. Wiemy, że
$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad |x| < r,$$
jest pierwotną f. Wobec tego dla $[a,b] \subset (-r,r)$
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$
czyli
$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

7.28. **Fakt.** *Jeśli* $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, *to* $fg \in \mathcal{R}([a,b])$.

Dowód. Ponieważ

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) \leq \|g\||f(x) - f(y)| + \|f\||g(x) - g(y)|,$$

więc dla każdego podziału P

$$\Omega(fg, P) - \underline{S}(fg, P) \leq \|g\|\Omega(f, P) + \|f\|\Omega(g, P),$$

co pozwala wnioskować, że iloczyn fg jest całkowalny, pod warunkiem że obie funkcje f i g są całkowalne. $\square$

7.29. **Twierdzenie** (całkowanie przez części). *Jeśli* $f, g : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \to \mathbf{R}$ *są różniczkowalne i* $f', g' \in \mathcal{R}([a,b])$, *to*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

gdzie

$$\phi(x)\Big|_a^b = \phi(b) - \phi(a).$$

Dowód. Wiemy, że

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad x \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon),$$

więc całkując obie strony i korzystając z podstawowego twierdzenia, otrzymujemy

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

skąd już natychmiast wynika wzór na całkowanie przez części. $\square$

7.30. **Przykład.** Mamy

$$\int_a^x \log t dt = \int_a^x t' \log t dt = t \log t\Big|_a^x - \int_a^x dt = t(\log t - 1)\Big|_a^x.$$

Zauważmy też, że rzeczywiście funkcja $x \to x(\log x - 1)$ jest pierwotną funkcji logarytmicznej,

7.31. **Przykład.** Niech $m, n \in \mathbf{Z}$ i niech $m \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} I_{n,m} = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx &= n \cos x \sin mx\Big|_0^{2\pi} + \frac{n}{m}\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx \\ &= (\frac{n}{m})^2 \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = (\frac{n}{m})^2 I_{n,m}, \end{aligned}$$

więc $(1 - (\frac{n}{m})^2)I_{n,m} = 0$, skąd

$$I_{n,m} = \begin{cases} 0, & |n| \neq |m|, \\ \pi, & |n| = |m|. \end{cases} \tag{7.32}$$

7.33. **Lemat.** *Niech* $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$. *Wtedy*

$$I_{2n} = \binom{n-1/2}{n}\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2n+1} = \binom{n+1/2}{n}^{-1}. \tag{7.34}$$

D o w ó d. Oba wzory wynikają łatwo z zależności rekurencyjnej

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n, \tag{7.35}$$

która bierze się z całkowania przez części:

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x\, dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x (\cos x)'\, dx \\ &= -(n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^2 x\, dx = -(n+1)I_n + (n+1)I_{n+2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ze względu na to, że $\sin 0 = \cos \pi/2 = 0$, przyrosty wartości funkcji we wzorze na całkowanie przez części znikają. □

Z zależności (7.35) wypływa następujący wniosek.

7.36. **Wniosek.** *Niech* $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$. *Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

D o w ó d. Rzeczywiście, jak łatwo widzieć

$$I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1},$$

skąd

$$1 \le \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \le \frac{2n}{2n+1},$$

co pozwala wyprowadzić naszą tezę za pomocą lematu o trzech ciągach. □

7.37. **Wniosek** (wzór Wallisa). *Jest*

$$\lim_{n\to\infty} n\binom{n-1/2}{n}^2 = \frac{1}{\pi}.$$

D o w ó d. Na mocy Lematu 7.33

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}\binom{n-1/2}{n}\binom{n+1/2}{n}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = (n+1/2)\binom{n-1/2}{n}^2 \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}},$$

więc nasza teza płynie wprost z Wniosku 7.36. □

Pamiętamy, że
$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$
Postaramy się teraz wzmocnić to oszacowanie, zmniejszając nieco jego prawą stronę. Dla $0 < x < 1$ mamy
$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \qquad \log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$
więc
$$\begin{aligned}\log\frac{1+x}{1-x} &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &< 2x + \frac{2}{3}x^3 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = 2x + \frac{2x^3}{2(1-x^2)}.\end{aligned}$$
Podstawiając $x = \frac{1}{2n+1}$, otrzymujemy
$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{12n(n+1)}\right). \tag{7.38}$$
I jeszcze jedna retrospekcja. Pamiętamy, że
$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n \in \mathbf{N}.$$
Za chwilę uzyskamy znacznie subtelniejsze przybliżenia.

7.39. **Twierdzenie** (wzór Stirlinga)**.** *Dla każdego* $n \in \mathbf{N}$
$$\sqrt{2\pi} < \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}} < \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{12n}}.$$

D o w ó d. Niech $s_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$. Mamy
$$\log\frac{s_n}{s_{n+1}} = (n+1/2)\log(1+1/n) - 1 > 0,$$
więc ciąg $\{s_n\}$ jest ściśle malejący. Jako ciąg liczb dodatnich ma granicę $s \geq 0$. Tę samą granicę ma ciąg $t_n = s_n e^{-\frac{1}{12n}}$, który z kolei jest ściśle rosnący, bo na mocy (7.38)
$$\log\frac{t_n}{t_{n+1}} = (n+1/2)\log(1+1/n) - 1 + \frac{1}{12n}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) < 0,$$
co pokazuje, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$
$$s_n e^{-\frac{1}{12n}} < s < s_n.$$
W szczególności $s > 0$. Pozostaje obliczyć granicę s. W tym celu zauważmy, że
$$\frac{s_n^2}{s_{2n}} = \frac{(n!)^2 2^{2n+1/2}}{(2n)!n^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{1/2}\binom{n-1/2}{n}},$$

więc na mocy wzoru Wallisa

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^2}{s_{2n}} = \sqrt{2\pi},$$

co było do okazania. □

I jeszcze jedno zastosowanie całkowania przez części – reszta Taylora w postaci całkowej.

7.40. **Twierdzenie.** *Niech f będzie funkcją różniczkowalną n razy w sposób ciągły w otoczeniu punktu $a \in \mathbf{R}$. Wówczas dla dostatecznie małych h jej reszta Taylora wyraża się wzorem*

$$R_n(h) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t)dt.$$

D o w ó d . Niech $S_n(h)$ oznacza prawą stronę wzoru. Gdy $n = 1$

$$S_1(h) = \int_0^h f'(a+t)dt = f(a+h) - f(a) = R_1(h).$$

Przypuśćmy przez indukcję, że $S_n(h) = R_n(h)$. Wtedy, całkując przez części, widzimy, że

$$\begin{aligned} S_{n+1}(h) &= \frac{1}{n!}(h-t)f^{(n)}(a+t)\Big|_0^h + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t)dt \\ &= -\frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(a) + R_n(h) = R_{n+1}(h), \end{aligned}$$

czego należało dowieść. □

A teraz wzór na *całkowanie przez podstawienie.*

7.41. **Twierdzenie.** *Niech $u : (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \to \mathbf{R}$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły. Jeśli $f \in C(u([a,b]))$, to*

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy = \int_a^b f(u(x))u'(x)dx.$$

D o w ó d . Niech $u([a,b]) = [c,d]$ i niech $F : (c-\varepsilon, d+\varepsilon)$ będzie funkcją różniczkowalną, taką, że $f'(y) = f(y)$ dla $y \in [c,d]$. Wtedy

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

dla $x \in [a,b]$, więc

$$\int_a^b f(u(x)u'(x)dx = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy,$$

co należało pokazać. □

7.42. **Przykład.** Rozważmy całkę

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2bx + c}},$$

przy założeniu, że ocinek $[\alpha, \beta]$ leży w obszarze, gdzie $x^2 + 2bx + c > 0$. Stosując podstawienie

$$u = \sqrt{x^2 + 2bx + c} + x, \qquad x = \frac{c - u^2}{2(u - b)},$$

skąd

$$\frac{du}{dx} = \frac{b + u}{u - x}$$

widzimy, że

$$I = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} \frac{du}{b + u} = \int_{\sqrt{\alpha^2 + 2b\alpha + c} + \alpha}^{\sqrt{\beta^2 + 2b\beta + c} + \beta} \frac{du}{b + u}.$$

Podstawienie to, zwane podstawieniem Eulera, sprowadza całkę z niewymiernością drugiego stopnia do całki z funkcji wymiernej.

Przechodzimy do twierdzeń o *wartości średniej* dla całek.

7.43. **Twierdzenie.** *Jeśli $f \in C([a, b])$, to istnieje $c \in (a, b)$, takie że*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

D o w ó d . Niech $F \in C([a, b])$ będzie pierwotną f na przedziale (a, b). Wtedy na mocy twierdzenia podstawowego i twierdzenia Lagrange'a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a)$$

dla pewnego $c \in (a, b)$. $\square$

7.44. **Twierdzenie.** *Niech $f, g \in C([a, b])$ i niech $g \geq 0$. Wtedy istnieje $c \in (a, b)$, takie że*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

D o w ó d . Funkcja f spełnia nierówności $m \leq f \leq M$, gdzie m i M są odpowiednio jej najmniejszą i największą warością w $[a, b]$. Stąd $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ dla $x \in [a, b]$ i

$$mA \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq MA,$$

gdzie $A = \int_a^b g(x)dx$. Funkcja $A \cdot f$ jest ciągła, a jej najmniejszą wartością jest Am, największą zaś AM. Istnieje więc $c \in [a, b]$, takie że

$$A \cdot f(c) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

co już jest niemal naszą tezą. Pozostaje jeszcze wykazać, że c można wybrać z wnętrza odcinka. Jeśli $A = 0$ lub f jest stała, jest to oczywiste. Jeśli zaś żaden z tych warunków nie jest spełniony, to $m < f(c) < M$. Niech $m = f(d_1)$ i $M = f(d_2)$. Na mocy własności Darboux istnieje punkt

$$c_1 \in \Big(\min\{d_1, d_2\}, \max\{d_1, d_2\}\Big) \subset (a, b),$$

taki że $f(c_1) = f(c)$. $\square$

Zwróćmy uwagę, że pierwsze twierdzenie o wartości średniej jest szczególnym przypadkiem drugiego, wtedy gdy $g(x) = 1$ dla $x \in [a, b]$.

I jeszcze trzecie twierdzenie o wartości średniej.

7.45. **Twierdzenie.** *Jeśli $f \in C([a, b]$, a $g : (a - \varepsilon, b + e) \to \mathbf{R}$ jest rosnąca i różniczkowalna w sposób ciągły, to istnieje $c \in (a, b)$, takie że*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

Dowód. Niech $F : (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ będzie pierwotną f na przedziale $[a, b]$. Wtedy

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b F'(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx,$$

a skoro $g' \geq 0$, możemy zastosować drugie twierdzenie o wartości średniej, by znaleźć $c \in (a, b)$, takie że

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)\int_a^b g'(x)dx \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)\Big(g(b) - g(a)\Big) \\ &= g(a)\Big(F(c) - F(a)\Big) + g(b)\Big(F(b) - F(c)\Big)\end{aligned}$$

i po skorzystaniu z równości

$$F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx, \qquad F(b) - F(c) = \int_c^b f(x)dx$$

otrzymać tezę. $\square$

Przechodzimy do ostatniego tematu tego rozdziału, funkcji o wahaniu skończonym. Niech będzie dana funkcja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ i podział $P = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ tego odcinka. Liczbę

$$V_a^b(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

nazywamy **wahaniem częściowym** funkcji f wyznaczonym przez podział P, natomiast kres górny wahań częściowych

$$V_a^b(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} V_a^b(f, P)$$

wahaniem całkowitym f. Jeśli $V_a^b(f) < \infty$, to mówimy, że funkcja f ma **wahanie skończone** (lub **ograniczone**) na przedziale $[a, b]$.

7.46. **Lemat.** *Funkcja lipschitzowska $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ma wahanie skończone i*

$$V_a^b(f) \le L(b - a),$$

gdzie L jest stałą z warunku Lipschitza. W szczególności funkcja g ciągła na $[a, b]$ i mająca pochodną ograniczoną w (a, b) jest funkcją o wahaniu skończonym i

$$V_a^b(g) \le \|g'\|(b - a).$$

D o w ó d. Niech $P = \{x_k\}$ będzie podziałem $[a, b]$. Jako że $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ dla dowolnych $x, y \in [a, b]$, mamy

$$V_a^b(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le L \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = L(b - a).$$

Zatem $V_a^b(f) \le L(b - a)$. $\square$

Ale nie tylko funkcją ciągłe mogą mieć wahanie skończone.

7.47. **Lemat.** *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jest monotoniczna, to $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.*

D o w ó d. Niech $P = \{x_k\}$ będzie podziałem $[a, b]$. Wtedy

$$V_a^b(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = |f(b) - f(a)|,$$

bo wszystkie wyrazy sumy są jednego znaku. Zatem wszystkie wahania częściowe są sobie równe i $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$. $\square$

7.48. **Przykład.** A oto przykład funkcji ciągłej na odcinku $[0, 1]$ o wahaniu nieskończonym. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Niech $x_k = \frac{1}{k}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k+1})| &= \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\right| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \geq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1},\end{aligned}$$

więc $V_0^1(f) = \infty$.

Nietrudno sprawdzić, korzystając z definicji wahania, że jeśli $a \leq c \leq b$ i funkcja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ma wahanie skończone, to

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f). \tag{7.49}$$

7.50. **Fakt.** *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ma wahanie skończone, to jest całkowalna.*

Dowód. Dla danego ε niech P będzie podziałem odcinka o średnicy $\delta < \frac{\varepsilon}{v}$, gdzie $v = V_a^b(f)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\Omega(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} \sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]} (f(x) - f(y))(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \delta \sum_{k=1}^{n} V_{x_{k-1}}^{x_k}(f) < \delta V_a^b(f) < \varepsilon.\end{aligned}$$

dzięki addytywności wahania (7.49). $\square$

7.51. **Twierdzenie.** *Niech $f : (a-\epsilon, b+\epsilon) \to \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i niech $f' \in \mathcal{R}([a,b])$. Wtedy*

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Niech $\delta > 0$, będzie tak mała, by dla każdego podziału $P = \{x_j\}$ odcinka $[a,b]$ o średnicy $\delta(P) < \delta$ i każdego ciągu punktów pośrednich $\mathbf{c}$ było

$$\left|S(|f'|, P, \mathbf{c}) - \int_a^b |f'(x)|dx\right| < \varepsilon.$$

Wtedy także na mocy twierdzenia Lagrange'a

$$\begin{aligned}V_a^b(f,P) &= \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |f'(c_j)|(x_j - x_{j-1}) = S(|f'|, P, \mathbf{c})\end{aligned}$$

i w takim razie

$$\left|V_a^b(f,P) - \int_a^b |f'(x)|dx\right| < \varepsilon$$

dla $\delta(P) < \delta$. Ale

$$V_a^b(f) = \sup_{\delta(P)<\delta} V_a^b(f,P),$$

więc f ma wahanie skończone i $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx$. $\square$

Mówimy, że krzywa $y = f(x)$, gdzie $a \le x \le b$, jest **prostowalna**, jeśli

$$L_a^b(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} L_a^b(f,P) < \infty,$$

gdzie

$$\begin{aligned} L_a^b(f,P) &= \sum_{j=1}^n |(x_j, f(x_j)) - (x_{j-1}, f(x_{j-1}))| \\ &= \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2} \end{aligned}$$

jest długością łamanej wpisanej w krzywą w punktach wyznaczonych przez podział P. jeśli krzywa jest prostowalna, to wielkość $L_a^b(f)$ nazywamy jej długością.

Jak łatwo zauważyć,

$$V_a^b(f) \le L_a^b(f) \le V_a^b(f) + b - a,$$

a więc krzywa $y = f(x)$ jest prostowalna, wtedy i tylko wtedy gdy funkcja f ma wahanie ograniczone.

7.52. **Twierdzenie.** *Niech $f : (a-\epsilon, b+\epsilon) \to \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i niech $f' \in \mathcal{R}([a,b])$. Wtedy krzywa $y = f(x)$ jest prostowalna i*

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Dowód tego twierdzenia jest tak podobny do dowodu twierdzenia poprzedniego, że pozostawimy go do samodzielnego uzupełnienia zainteresowanemu Czytelnikowi.

7.53. **Fakt.** *Jeżeli funkcja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o wahaniu ograniczonym jest ciągła w pewnym punkcie c, to także funkcja $v(x) = V_a^x(f)$ jest ciągła w tym punkcie.*

D o w ó d. Dla zadanego $e > 0$ niech $P = \{x_k\}$ będzie podziałem odcinka $[a,b]$, takim że $V_a^b(f) < V_a^b(f,P) + \varepsilon$. Możemy założyć, że $c = x_K$ jest jednym z punktów podziału. Niech $c < x < x_{K+1}$ i niech Q będzie podziałem odcinka $[c,x]$, takim że $V_c^x(f) < V_c^x(f,Q) + \varepsilon$. Niech $R = P \cup Q$. Wtedy

$$\begin{aligned} V_a^b(f,P) + V_c^x(f,Q) &= V_a^b(f,R) + |f(x) - f(c)| \\ &\le V_a^b(f) + |f(x) - f(c)|, \end{aligned}$$

więc na mocy wyboru podziałów P i Q

$$V_a^b(f) + V_c^x(f) \leq V_a^b(f) + |f(x) - f(c)| + 2\varepsilon,$$

czyli

$$v(x) - v(c) \leq |f(x) - f(c)| + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$$

jeśli x jest dostatecznie bliskie c, dzięki ciągłości f w c. Podobnie rozumujemy dla $x < c$. □

7.54. **Twierdzenie.** *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jest funkcją (ciągłą) o wahaniu ograniczonym, to istnieją (ciągłe) funkcje rosnące u i v na $[a, b]$, takie że $f = v - u$.*

D o w ó d. Niech $v(x) = V_a^x(f)$. Wiemy, że v jest funkcją rosnącą. Pozostaje wykazać, że $u = v - f$ jest też funkcją rosnącą. W tym celu zauważmy, że dla $x < y$

$$f(y) - f(x) \leq V_x^y(f) = v(y) - v(x),$$

a więc $u(x) < u(y)$, co wynika z definicji wahania i (7.49). Jeśli f jest ciągła, to, jak wynika z Faktu 7.53, także v jest ciągła. Stąd i u jest ciągła. □

8. Jednostajna zbieżność – miscellanea

Ciąg funkcyjny $f_n : D \to \mathbf{R}$ jest **zbieżny jednostajnie** do $f : D \to \mathbf{R}$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{n\geq N}\ \|f_n - f\| < \varepsilon,$$

co zapisujemy przy pomocy podwójnej strzałki

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \qquad x \in D.$$

8.1. Uwaga (warunek Cauchy'ego). Ciąg funkcyjny $f_n : D \to \mathbf{R}$ jest **zbieżny jednostajnie**

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{n,m\geq N}\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

8.2. Uwaga. Jeśli $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na D, to dla każdego $x \in D$ jest $f_n(x) \to f(x)$. Zatem zbieżność jednostajna oznacza coś więcej niż zbieżność w każdym punkcie x z osobna. Taką zbieżność będziemy nazywać **punktową**.

8.3. Uwaga. Ciąg f_n nie jest zbieżny jednostajnie do 0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{x_n\} \subset D$, taki że ciąg $\{f_n(x_n)\}$ nie jest zbieżny do 0.

8.4. **Twierdzenie.** *Granica f jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych f_n na D jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in D$, w którym wszystkie funkcje f_n są ciągłe.*

8.5. **Wniosek.** *Jeśli $f_n \in C([a,b])$ i $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, to $f \in C([a,b]$.*

8.6. **Wniosek.** *Jeśli $f_n \in C([a,b])$ i $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, to*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

8.7. **Twierdzenie.** *Niech f_n będą funkcjami różniczkowalnymi w sposób ciągły na (a,b). Jeśli ciąg f_n jest zbieżny do funkcji f punktowo, a ciąg f_n' zbieżny jednostajnie do funkcji g, to f jest funkcją różniczkowalną i $f'(x) = g(x)$ dla każdego $x \in D$. Innymi słowy,*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \qquad x \in D.$$

Niech $f_n : D \to \mathbf{R}$. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na D, jeśli ciąg funkcyjny jego sum częściowych $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ jest zbieżny jednostajnie na D.

8.8. **Wniosek.** *Niech f_n będą funkcjami różniczkowalnymi w sposób ciągły na (a,b). Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny do funkcji f punktowo, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$*

zbieżny jednostajnie do funkcji g, to f jest funkcją różniczkowalną i $f'(x) = g(x)$ dla każdego $x \in D$. Innymi słowy,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \qquad x \in D.$$

8.9. **Kryterium** (Weierstrass). *Niech $f_n : D \to \mathbf{R}$. Jeśli dla każdego $x \in D$ jest $|f_n(x)| \leq a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie.*

Mówimy wtedy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżną **liczbową majorantą** szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty}$.

8.10. **Wniosek.** *Szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie na każdym domkniętym przedziale zawartym w jego otwartym przedziale zbieżności.*

8.11. **Kryterium** (Abel). *Niech będą dane dwa ciągi funkcyjne $f_n, g_n : D \to \mathbf{R}$. Niech ciąg $\{f_n\}$ będzie monotoniczny. Jeżeli f_n jest jednostajnie zbieżny do zera, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ma sumy częściowe jednostajnie ograniczone, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny.*

8.12. **Kryterium** (Dirichlet). *Niech będą dane dwa ciągi funkcyjne $f_n, g_n : D \to \mathbf{R}$. Niech ciąg $\{f_n\}$ będzie monotoniczny. Jeżeli f_n jest jednostajnie ograniczony, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jednostajnie zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny.*

8.13. **Twierdzenie** (Dini). *Jeśli monotoniczny ciąg funkcji ciągłych na przedziale domkniętym $[a, b]$ jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, to jest zbieżny jednostajnie.*

8.14. **Twierdzenie** (Weierstrass). *Każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ jest jednostajną granicą ciągu wielomianów.*

Aby udowodnić to twierdzenie wprowadza się rodzinę wielomianów:

$$\phi_n(t) = c_n(1 - t^2)^n,$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2}\binom{n + 1/2}{n},$$

tak że $\int_{-1}^{1} \phi_n(t)dt = 1$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$. Tak zdefiniowane wielomiany mają następującą ważną własność. Dla każdego $0 < \delta < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|<\delta} \phi_n(t)dt = 1.$$

Wielomianem Tonelli'ego funkcji $f \in C([0,1]$ nazywamy wielomian

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 \phi_n(x-t)f(t)dt.$$

Twierdzenie Weierstrassa wynika z następującego lematu.

8.15. **Lemat.** *Niech* $f \in C([0,1]$. *Wówczas dla każdego* $[a,b] \subset (0,1)$

$$T_n(f)(x) \rightrightarrows f(x), \qquad x \in [a,b].$$

Niech będzie dana funkcja $f : [a,\infty) \to \mathbf{R}$. Jeśli f jest całkowalna na każdym przedziale $[a,b]$ i istnieje granica

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

to nazywamy ją **całką niewłaściwą** (pierwszego rodzaju) funkcji f na $[a,\infty)$ i oznaczamy

$$I = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx.$$

Niech będzie dana funkcja $f : [a,b) \to \mathbf{R}$. Jeśli f jest całkowalna na każdym przedziale $[a,t]$, gdzie $a < t < b$, i istnieje granica

$$I = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

to nazywamy ją **całką niewłaściwą** (drugiego rodzaju) funkcji f na $[a,b]$ i oznaczamy

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a} \int_t^b f(x)dx$$

dla funkcji f całkowalnej na każdym przedziale $[t,b]$ dla $a < t < b$.

8.16. **Kryterium** (porównawcze). *Niech będzie dana dodatnia funkcja malejąca* $f : [1,\infty) \to \mathbf{R}$. *Wówczas*

$$\int_1^\infty f(x)dx < \infty \iff \sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty,$$

a dokładniej

$$\sum_{n=2}^N f(n) \le \int_1^N f(x)dx \le \sum_{n=1}^N f(n), \qquad N \in \mathbf{N}.$$

8.17. **Wniosek.** *Niech* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka* $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$.

8.18. Uwaga. Całka $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$. Całka $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < 1$.

8.19. **Lemat** (Riemann-Legesgue). *Dla każdej funkcji ciągłej na przedziale* $[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

A oto całki niewłaściwe, które warto zapamiętać. Pierwsza z nich to całka Poissona

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Druga to całka Hilberta

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Jest jeszcze całka Eulera

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0,$$

która definiuje funkcję zwaną **gammą Eulera**. Ta całka jest sumą dwóch całek niewłaściwych $\Gamma(x) = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)$, gdzie

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad \Gamma_2(x) = \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Funkcja Γ jest ciągła i ma następującą własność

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x > 0,$$

skąd łatwo wynika, że

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Ponadto

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Wiemy, że funkcja różniczkowalna w danym punkcie jest też w tym punkcie ciągła. Łatwo podać przykład funkcji ciągłej, ale nieróżniczkowalnej w izolowanych punktach. Taką funkcją jest np.

$$u(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{Z}).$$

Jest to funkcja ciągła (kawałkami liniowa) na całej prostej, ale nieróżniczkowalna w punktach $x_n = \frac{n}{2}$. Okazuje się, że istnieją funkcje ciągłe, które nie mają *nigdzie* pochodnej.

8.20. **Fakt** (van der Waerden). *Niech*

$$u_k(x) = 4^{-k}u(4^k x)$$

dla $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. *Funkcja zadana szeregiem*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$

jest ciągła. Nie jest jednak różniczkowalna w żadnym punkcie.

Pierwszy przykład funkcji ciągłej i nigdzie nie różniczkowalnej pochodzi od Weierstrassa i jest dość skomplikowany. Przykład van der Waerdena korzysta z tego samego pomysłu, ale jest znacznie prostszy technicznie. Na cześć autora pomysłu skonstruowaną wyżej funkcję nazywa się czasem **piłą Weierstrassa**.